بسم الله الرحمن الرحیم

مقاومت مصالح

تهیه کننده:

ابوالفضل افضلی

منابع

۱- مقاومت مصالح(بیر جانستون)

۲- مقاومت مصالح(پوپوف)

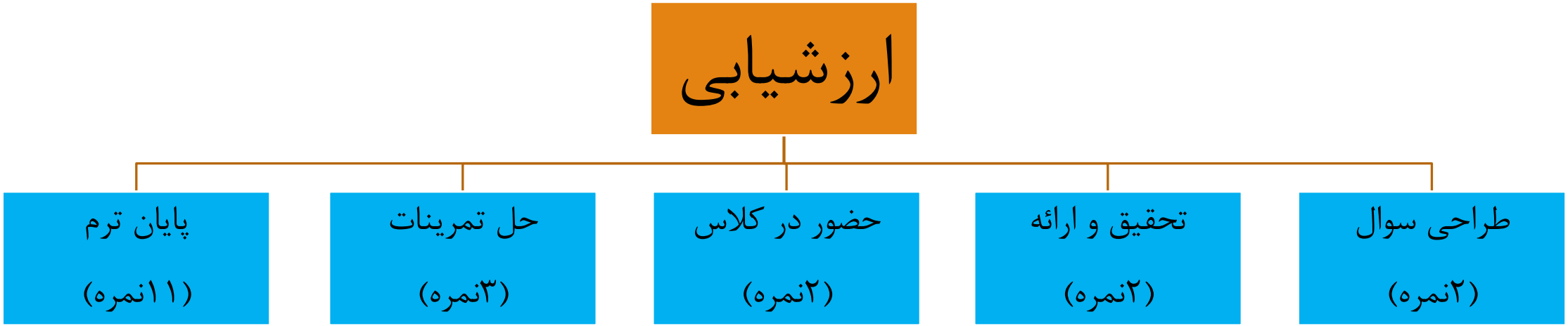
سر فصل مطالب

فصل اول :مفهوم تنش

فصل دوم:محاسبه تغییر طول اجسام صلب

فصل سوم: تئوری پیچش

فصل چهارم: تئوری خمش


ارزشیابی
طراحی سوال
(۲نمره)
تحقیق و ارائه
(۲نمره)
حضور در کلاس
(۲نمره)
حل تمرینات
(۳نمره)
پایان ترم
(۱۱نمره)

فصل اول : مفهوم تنش

تعریف تنش

از ابتدایی‌ترین و مهم‌ترین مفاهیم موجود در مقاومت مصالح می باشد. هنگامی که نیرویی بر یک سازه یا عضوی از آن وارد شود، تنش بوجود می‌آیند. **تنش** را می‌توان به صورت نیروی وارده بر یک جسم در واحد سطح تعریف کرد. بر اساس این تعریف، معادله تنش به شکل زیر خواهد بود:

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

فصل اول : مفهوم تنش

واحدهای اندازه گیری تنش

تنش در سیستم بین‌المللی واحدها یا اصطلاحاً SI، با واحد **نیوتن بر مترمربع** (N/m^2) نشان داده می‌شود که معادل یک **پاسکال** (Pa) است.

واحدهای معروف دیگری که برای تنش بکار میرود مگاپاسکال (MPa) و گیگاپاسکال (GPa) می باشد.

$$Pa \rightarrow \frac{N}{m^2}$$

$$MPa \rightarrow \frac{N}{mm^2}$$

فصل اول : مفهوم تنش

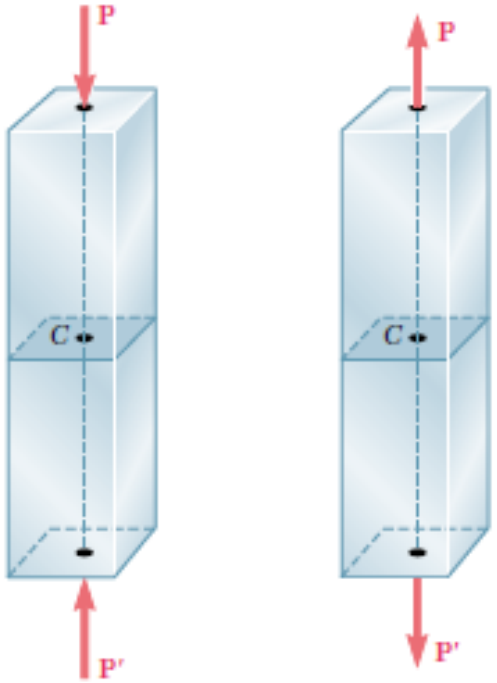
انواع تنش

۱- تنش نرمال: از نیروی محوری و گشتاور خمشی حاصل می شود

۲- تنش برشی: از نیروی برشی و گشتاور پیچشی حاصل می شود.

فصل اول : مفهوم تنش

تنش نرمال ناشی از نیروی محوری



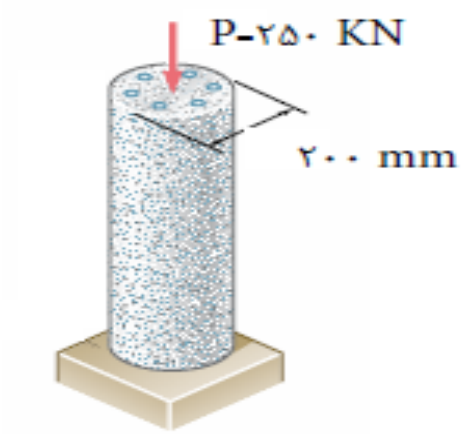
$$\sigma = \frac{\pm P}{A}$$

فصل اول : مفهوم تنش

مثال ۱

ستونی کوتاه مطابق شکل روبه‌رو تحت تاثیر نیروی محوری $P=۲۵۰KN$ قرار دارد.

مطلوب‌است محاسبه تنش در پای ستون (از وزن ستون صرف نظر شود).



حل:

نیروی P فشاری است: $P=-۲۵۰KN=-۲۵۰\times۱۰۰۰=-۲۵۰۰۰۰\ N$

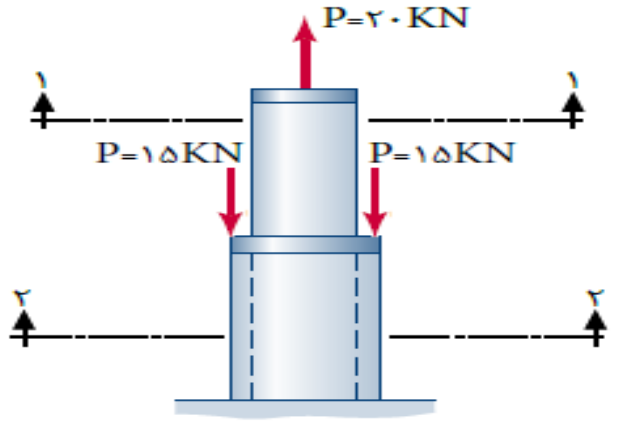
$$A=\frac{\pi d^{۲}}{۴}=\frac{\pi\times۲۰۰^{۲}}{۴}=۳۱۴۰۰\ mm^{۲}$$

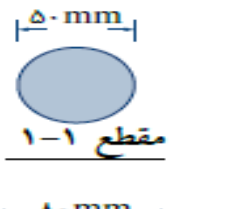
$$\sigma=\frac{P}{A}=\frac{-۲۵۰۰۰۰}{۳۱۴۰۰}\Rightarrow \boxed{\sigma=-۷/۹۶\ \frac{N}{mm^{۲}}\ \text{یا}\ MPa}$$

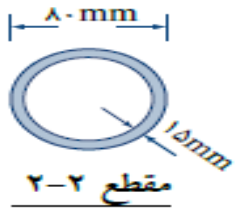
فصل اول : مفهوم تنش

مثال ۲

جسمی مطابق شکل تحت تأثیر نیروهای نشان‌داده شده قرار دارد. مطلوب‌است محاسبهٔ تنش در هر قسمت از جسم.







حل:

الف) تنش در مقطع ۱-۱

$$\begin{cases} P = ۲۰\ KN = ۲۰۰۰۰\ N \\ A = \dfrac{\pi\ D^{۲}}{۴} = \dfrac{۳/۱۴ \times ۵۰^{۲}}{۴} = ۱۹۶۲/۵\ mm^{۲} \end{cases}$$

$$\sigma_{۱} = \frac{P}{A} = \frac{۲۰۰۰۰}{۱۹۶۲/۵} \Rightarrow \boxed{\sigma_{۱} = ۱۰/۱۹\ MPa \quad \text{کششی}}$$

فصل اول : مفهوم تنش

ب) تنش در مقطع ۲-۲

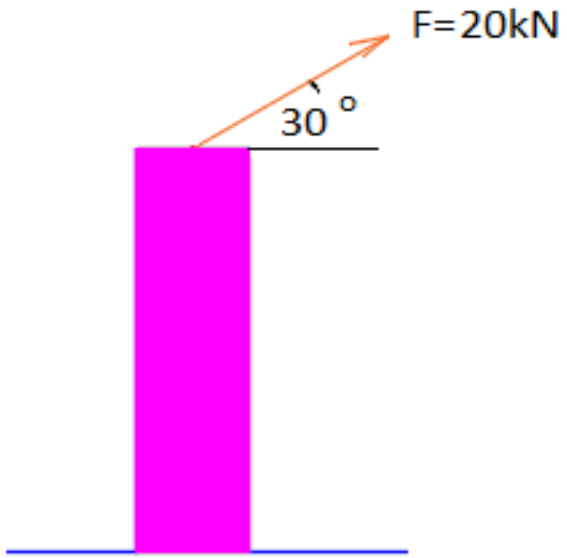
با توجه به شکل برآیند نیروهای وارد به مقطع (۲-۲) برابر است با:

$$\begin{cases} P = -۱۵ - ۱۵ + ۲۰ = -۱۰ KN = -۱۰۰۰۰ \ N \\ A = \dfrac{\pi D^۲}{۴} - \dfrac{\pi d^۲}{۴} = \dfrac{۳/۱۴ \times ۸۰^۲}{۴} - \dfrac{۳/۱۴ \times ۵۰^۲}{۴} = ۳۰۶۱/۵ \ mm^۲ \end{cases}$$

$$\sigma_۲ = \frac{P}{A} = \frac{-۱۰۰۰۰}{۳۰۶۱/۵} \Rightarrow \boxed{\sigma_۲ = -۳/۲۷ \ MPa \quad \text{فشاری}}$$

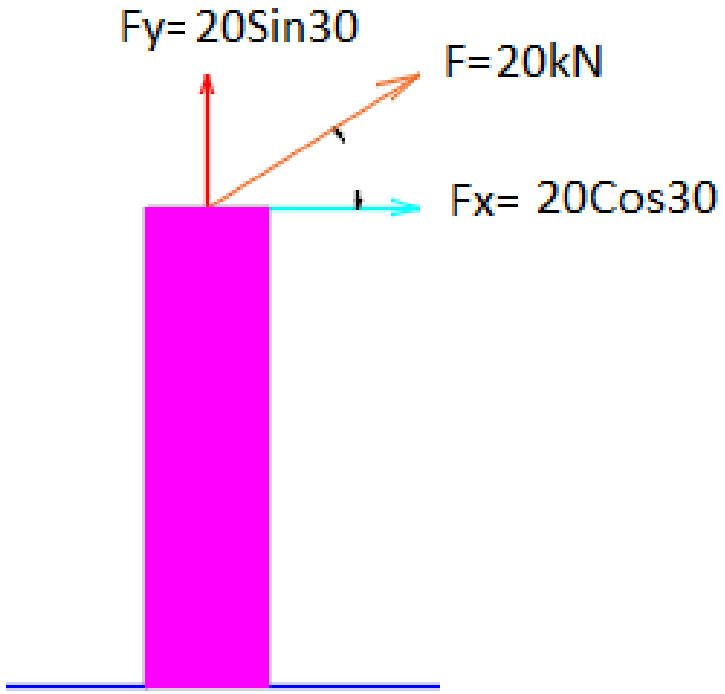
فصل اول : مفهوم تنش

مثال ۳: تنش های وارد بر میله زیر که قطر آن 2cm است را حساب کنید.



فصل اول : مفهوم تنش

حل:



$$\sigma = \frac{F_y}{A}$$

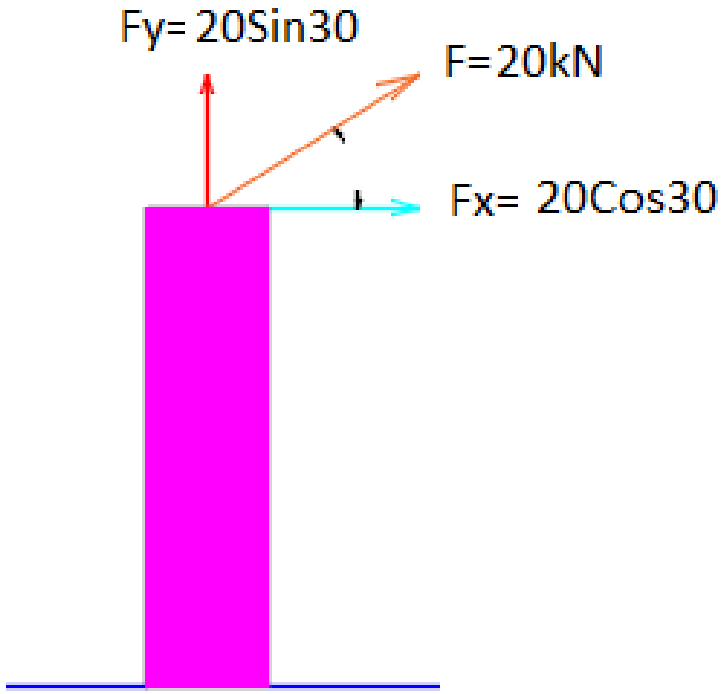
Fy=20000xsin30°=20000x0.5=10000N

$$A=\frac{\pi d^2}{4} \rightarrow A = \frac{3.14\times 20^2}{4}=314mm^2$$

$$\sigma = \frac{F_y}{A} \rightarrow \sigma = \frac{10000}{314} \rightarrow \sigma = 31.8Mpa$$

فصل اول : مفهوم تنش

حل:



$$\tau = \frac{F_x}{A}$$

Fx=20000xcos30°=20000x0.86=17200N

$$A=\frac{\pi d^2}{4} \rightarrow A = \frac{3.14\times 20^2}{4}=314mm^2$$

$$\tau \frac{F_x}{A}$$

$$\tau = \frac{F_x}{A} \rightarrow \tau = \frac{17200}{314} \rightarrow \tau = 54.7Mpa$$

فصل اول : مفهوم تنش

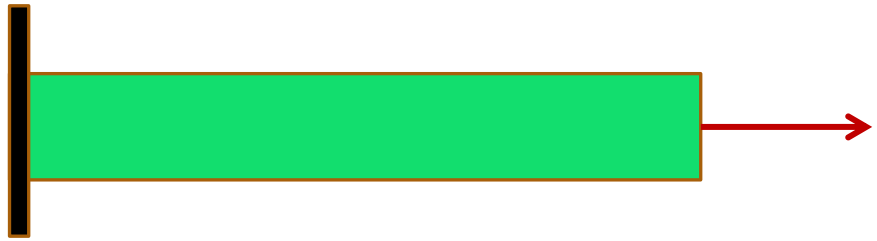
ضریب اطمینان : نسبت تنش نهایی به تنش مجاز را ضریب اطمینان می گویند.

$$F.S = \frac{\sigma_U}{\sigma_{all}} \rightarrow \text{تنش نرمال}$$

$$F.S = \frac{\tau_U}{\tau_{all}} \rightarrow \text{تنش برشی}$$

فصل اول : مفهوم تنش

مثال ۴: میله فولادی نشان داده شده دارای تنش نهایی 380MPa بوده و با ضریب اطمینان 2.5 طراحی شده است. قطر میله حداکثر چقدر می تواند باشد؟



σ_U=380MPa

F.S=2.5

F=40kN=40000N

d=?

فصل اول : مفهوم تنش

حل:

$$F.S = \frac{\sigma_U}{\sigma_{all}} \rightarrow 2.5 = \frac{380}{\sigma_{all}} \rightarrow \sigma_{all} = \frac{380}{2.5} \rightarrow \sigma_{all} = 152MPa$$

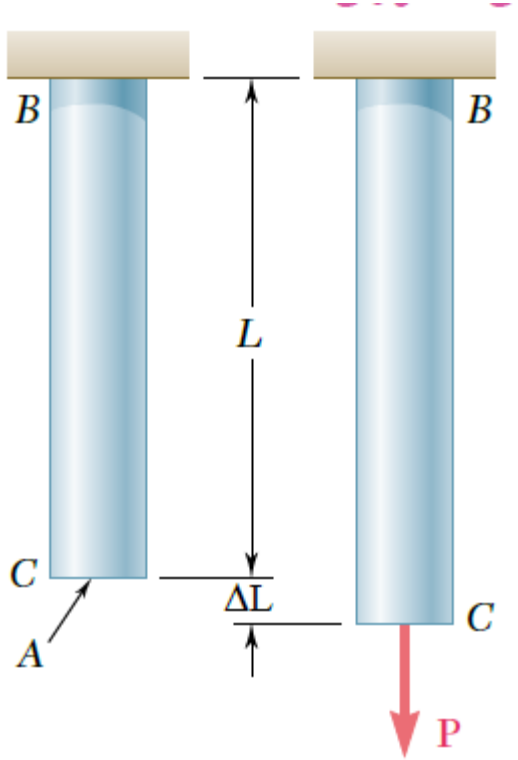
$$\sigma_{all} = \frac{F}{A} \rightarrow A = \frac{F}{\sigma_{all}} \rightarrow A = \frac{40000}{152} = 263.15mm^2$$

$$A = \frac{\pi d^2}{4} \rightarrow 263.15 = \frac{3.14d^2}{4} \rightarrow 263.15 = 0.785d^2$$

$$d^2 = \frac{263.15}{0.785} = 335.2 \rightarrow d = \sqrt{335.2} \rightarrow d = 18.3mm$$

فصل دوم : تغییر طول اجسام صلب

وقتی جسم صلبی مطابق شکل تحت نیروی محوری قرار می گیرد دچار تغییر طول می شود، که از رابطه زیر محاسبه می گردد.

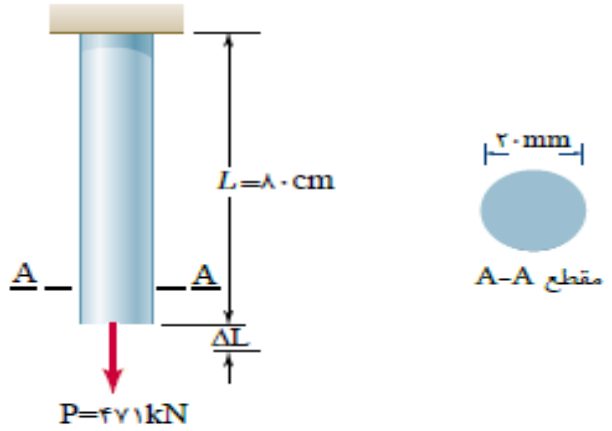


$$\Delta L = \frac{P.\ L}{A.\ E}$$

فصل دوم : تغییر طول اجسام صلب

مثال ۴

مطلوب‌است تغییر طول میله فولادی مطابق شکل زیر؛ اگر ضریب ارتجاعی میله $E = ۲\times۱۰^{۵}\ \frac{N}{mm^{۲}}$ باشد (از وزن میله صرف‌نظر می‌شود).



$P = ۴۷۱\ KN = ۴۷۱۰۰۰\ N$

فصل دوم : تغییر طول اجسام صلب

$$P = ۴۷۱\ KN = ۴۷۱۰۰۰\ N$$

$$L = ۸۰\ cm = ۸۰۰\ mm$$

$$A = \frac{\pi\ D^{۲}}{۴} = \frac{۳/۱۴ \times ۲۰^{۲}}{۴} = ۳۱۴\ mm^{۲}$$

$$E = ۲ \times ۱۰^{۵}\ \frac{N}{mm^{۲}}$$

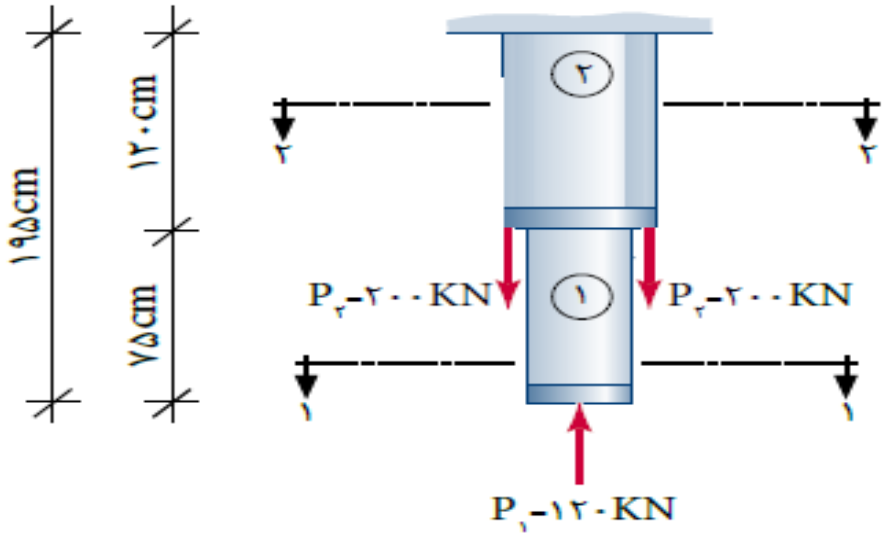
$$\Delta L = \frac{P.\ L}{A.\ E} = \frac{۴۷۱۰۰۰ \times ۸۰۰}{۳۱۴ \times ۲ \times ۱۰^{۵}} \Rightarrow \boxed{\Delta L = ۶\ mm}$$

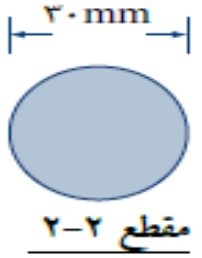
فصل دوم : تغییر طول اجسام صلب

مثال ۵

تغییر طول کلی جسم فولادی مطابق شکل زیر را محاسبه کنید.

$$\left(E = ۲\times ۱۰^{۵}\ \frac{N}{mm^{۲}}\right)$$





فصل دوم : تغییر طول اجسام صلب

حل:

تغییر طول کلی جسم برابر است با جمع جبری تغییر طول هر یک از قطعات ① و ②

یعنی:

$$\Delta L_t = \Delta L_1 + \Delta L_2$$

الف) تغییر طول قطعه شماره ۱:

$P_1 = -۱۲۰\ KN = -۱۲۰۰۰۰\ N$ نیروی P فشاری می‌باشد.

$$L_1 = ۷۵\ cm = ۷۵۰\ mm$$

$$A_1 = \frac{\pi D_1^2}{۴} = \frac{۳/۱۴ \times ۱۰^2}{۴} = ۷۸/۵\ mm^2$$

$$E = ۲ \times ۱۰^5\ \frac{N}{mm^2}$$

$$\Delta L_1 = \frac{P_1 . L_1}{A_1 . E_1} = \frac{-۱۲۰۰۰۰ \times ۷۵۰}{۷۸/۵ \times ۲ \times ۱۰^5}$$

$$\boxed{\Delta L_1 = -۵/۷۳\ mm}$$

با توجه به علامت منفی، طول قطعهٔ ① کاهش می‌یابد.

فصل دوم : تغییر طول اجسام صلب

ب) تغییر طول قطعه شماره ۲:

$$P_۲ = ۲۰۰ + ۲۰۰ - ۱۲۰ = ۲۸۰ \ KN = ۲۸۰۰۰۰ \ N$$

$$L_۲ = ۱۲۰ \ cm = ۱۲۰۰ \ mm$$

$$A_۲ = \frac{\pi D_۲^{۲}}{۴} = \frac{۳/۱۴ \times ۳۰^{۲}}{۴} = ۷۰۶/۵ \ mm^{۲}$$

$$E = ۲ \times ۱۰^{۵} \ \frac{N}{mm^{۲}}$$

$$\Delta L_۲ = \frac{P_۲ . L_۲}{A_۲ . E_۲} = \frac{۲۸۰۰۰۰ \times ۱۲۰۰}{۷۰۶/۵ \times ۲ \times ۱۰^{۵}}$$

$$\boxed{\Delta L_۲ = ۲/۳۸ \ mm}$$

افزایش طول قطعهٔ (۲)

تغییر طول کلی جسم برابر است با:

$$\Delta L_t = \Delta L_۱ + \Delta L_۲ = -۵/۷۳ + ۲/۳۸ \Rightarrow \boxed{\Delta L_t = -۳/۳۵ \ mm}$$

با توجه به علامت منفی، طول کل جسم کاهش می‌یابد.

فصل سوم : تئوری پیچش

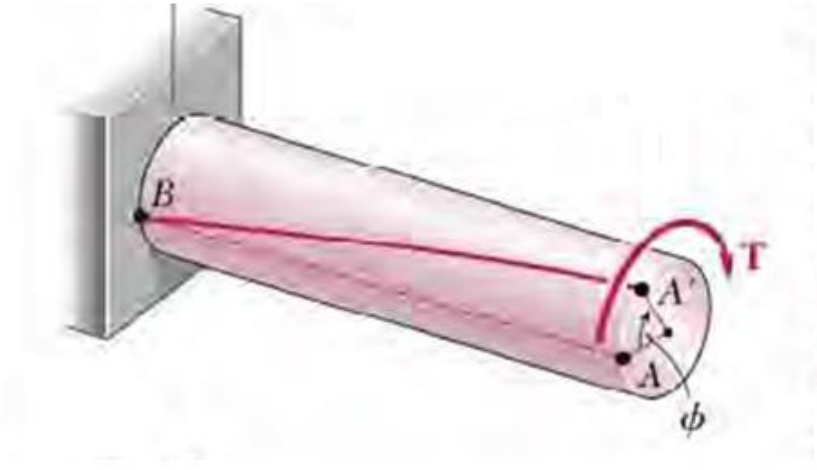
در این فصل بحث پیچش مقاطع دایروی می باشد.

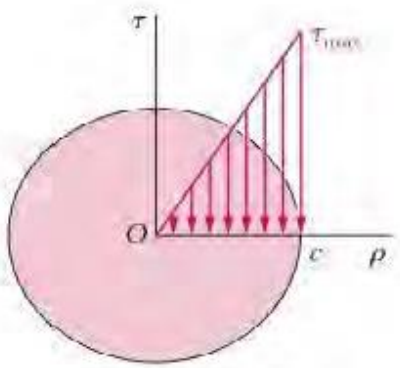
همانگونه که در شکل می بینید گشتاور پیچشی T باعث ایجاد تنش برشی در یک محور میشود.

معادلات مربوط به تنش برشی برای یک محور توپر به شکل زیر است که T گشتاور پیچشی بر حسب N/m

R شعاع محور ببر حسب m و J ممان قطبی سطح میباشد.

همچنین τ_{Max} حداکثر تنش برشی ایجاد شده در محور است بر حسب pa





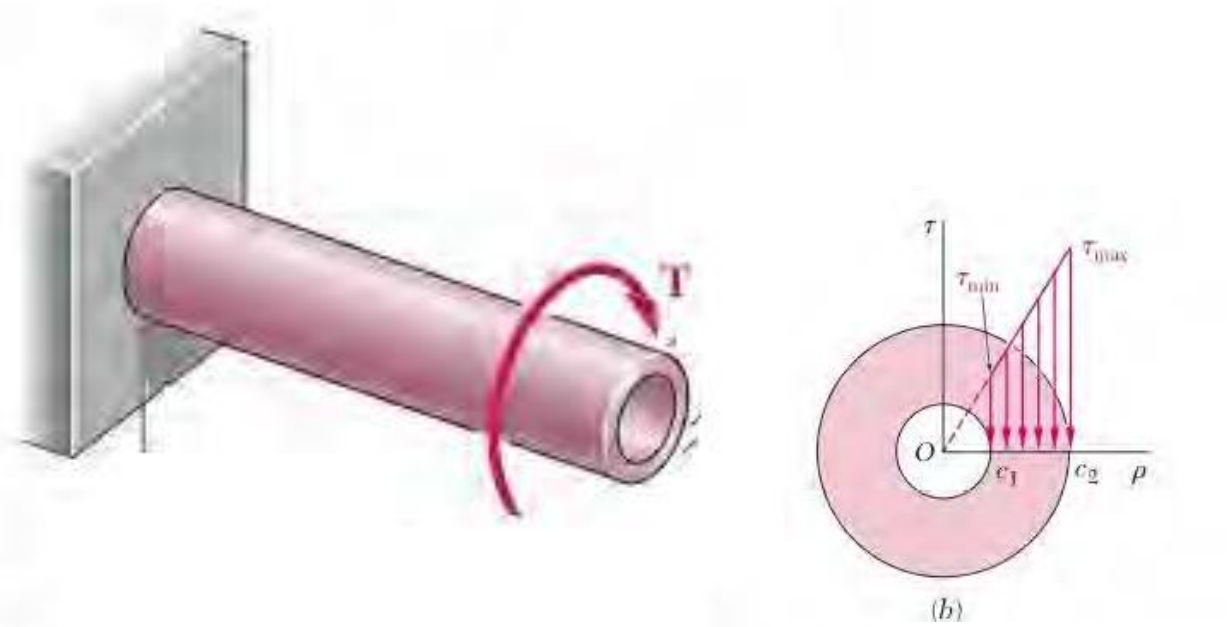
$$\tau_{Max}=\frac{TR}{J}$$

$$J=\frac{\pi R^4}{2}$$

فصل سوم : تئوری پیچش

معادلات مربوط به تنش برشی برای یک محور توخالی هم به شکل زیر است که T گشتاور پیچشی بر حسب N/m

R_1 شعاع دایره داخلی و R_2 شعاع دایره خارجی محور بر حسب m و J ممان قطبی سطح میباشد.



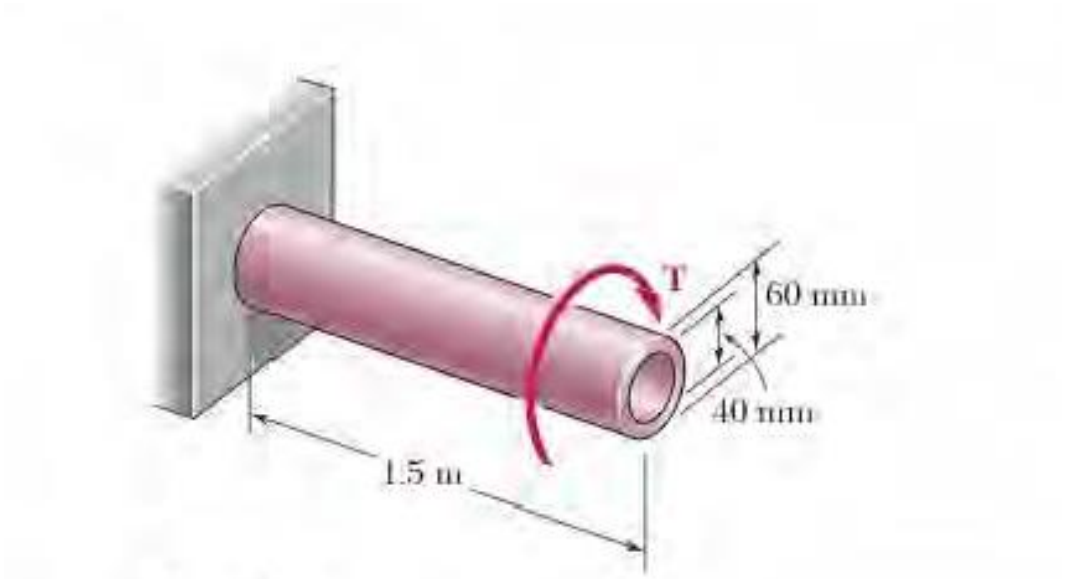
$$\tau_{Max}=\frac{TR_2}{J}$$

$$\tau_{Min}=\frac{TR_1}{J}$$

$$J=\frac{\pi}{2}({R_2}^4-{R_1}^4)$$

فصل سوم : تئوری پیچش

مثال ۶ : محوری تحت گشتاور پیچشی مطابق شکل قرار گرفته است. اگر حداکثر تنش برشی بوجود آمده در محور 120MPa باشد الف):مقدار بزرگترین گشتاور پیچشی که میتوان به محور وارد کرد چقدر است ب): حداقل تنش برشی که در محور بوجود می آید چقدر است؟



حل:

$$R_1 = \frac{40}{2} = 20mm \div 1000 \rightarrow R_1 = 0.02\text{m}$$

$$R_2 = \frac{60}{2} = 30mm \div 1000 \rightarrow R_1 = 0.03\text{m}$$

$$\tau_{Max} = 120MPa = 120 \times 10^6 \text{Pa}$$

فصل سوم : تئوری پیچش

الف

$$\tau_{Max}=\frac{TR_2}{J}$$

$$J=\frac{\pi}{2}({R_2}^4-{R_1}^4)\rightarrow J=\frac{3.14}{2}(0.03^4-0.02^4)\rightarrow J=\frac{3.14}{2}(0.03^4-0.02^4)$$

$$J=1.02\times10^{-6}m^4$$

$$\tau_{Max}=\frac{TR_2}{J}\rightarrow 120\times10^6=\frac{\boldsymbol{T\times0.03}}{1.02\times10^{-6}}\rightarrow T=\frac{120\times10^6\times1.02\times10^{-6}}{0.03}\rightarrow T=\frac{120\times1.02}{0.03}$$

$$\rightarrow T=4080N.m$$

فصل سوم : تئوری پیچش

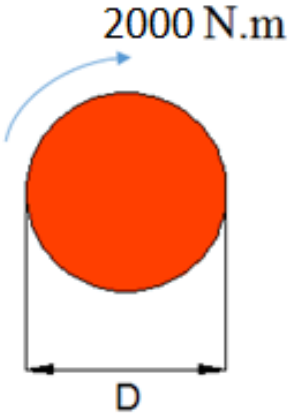
ب-

$$\tau_{Min}=\frac{TR_1}{J} \rightarrow \tau_{Min}=\frac{4080\times0.02}{1.02\times10^{-6}}$$

$$\tau_{Min}=\frac{81.6}{1.02\times10^{-6}}=80\times10^{6}Pa \rightarrow \tau_{Min}=80\text{Mpa}$$

فصل سوم : تئوری پیچش

مثال۷: محوری تحت گشتاور پیچشی مطابق شکل قرار گرفته است. اگر این محور از فولادی که تنش برشی نهایی آن 300MPaاست و با ضریب اطمینان 2ساخته شده باشد حداکثر قطر محور چقدر است؟



فصل سوم : تئوری پیچش

$\tau_U = 300\text{MPa}$ $\quad$ $\text{F.S} = 2$ $\quad$ $\text{T} = 2000\text{N.m}$ $\quad$ $\text{D} = ?$

$$F.S = \frac{\tau_U}{\tau_{all}} \rightarrow 2 = \frac{300}{\tau_{all}} \rightarrow \tau_{all} = \frac{300}{2} = 150MPa$$

$$\tau_{Max} = \tau_{all} \rightarrow \tau_{Max} = 150MPa = 150 \times 10^6 Pa$$

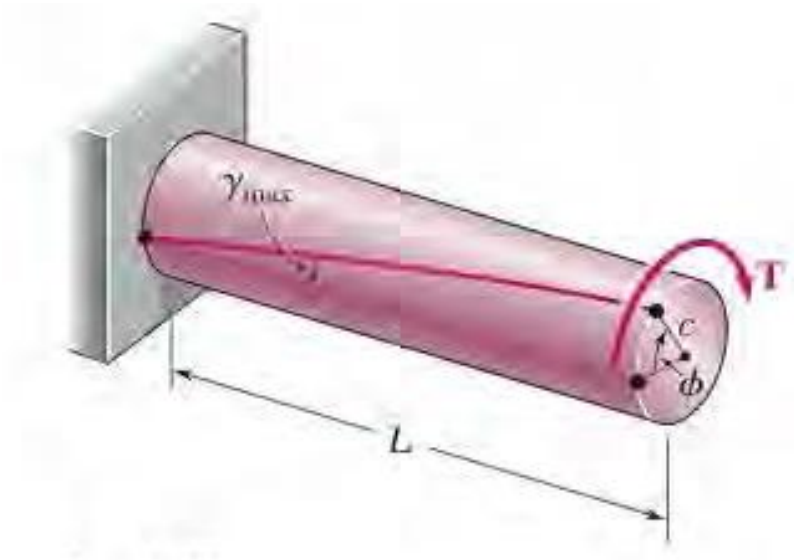
$$\left.\begin{array}{l} \tau_{Max} = \dfrac{TR}{J} \\ J = \dfrac{\pi R^4}{2} \end{array}\right\} \rightarrow \tau_{Max} = \frac{TR}{J} = \frac{TR}{\frac{\pi R^4}{2}} \rightarrow \tau_{Max} = \frac{2T}{\pi R^3} \rightarrow 150 \times 10^6 = \frac{2 \times 2000}{\pi R^3} \rightarrow R^3 = \frac{4000}{3.14 \times 150 \times 10^6}$$

$$R^3 = 8.5 \times 10^{-6} \rightarrow R = \sqrt[3]{8.5 \times 10^{-6}} = 0.02m = 20mm \rightarrow D = 2R = 2 \times 20 \rightarrow D = 40mm$$

فصل سوم : تئوری پیچش

زاویه پیچش : در اثر اعمال گشتاور پیچشی به یک محور زاویه پیچش حاصل می شود که از معادله زیر بدست می آید.

$$\emptyset = \frac{TL}{GJ}$$



ϕ زاویه پیچش بر حسب رادیان

T گشتاور پیچشی بر حسب N.m

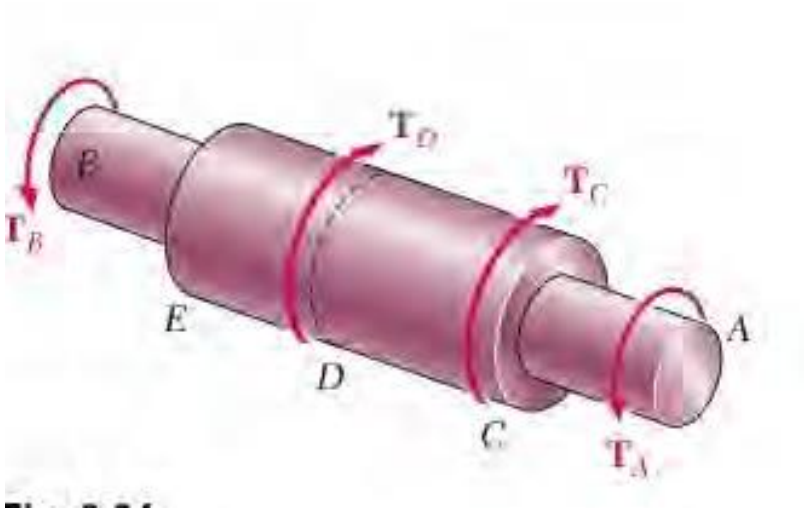
L طول محور بر حسب m

G مدول برشی که به جنس محور مرتبط است بر حسبPa

J ممان قطبی که در قسمت قبل توضیح داده شد

فصل سوم : تئوری پیچش

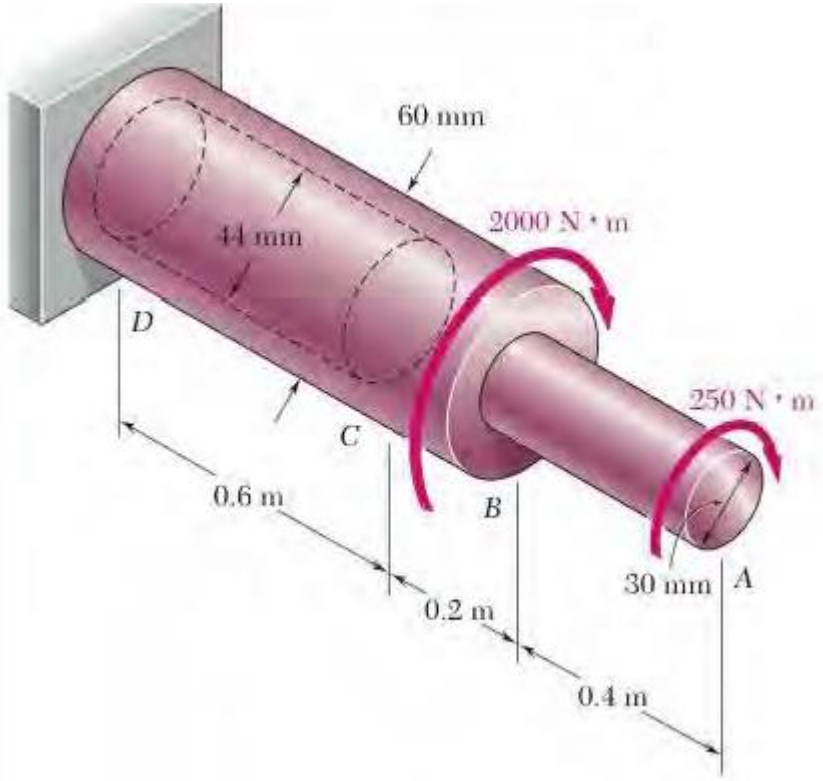
در صورتی که محورها بصورت مرکب باشند زاویه پیچش کلی بصورت جمع آنها خواهد بود.



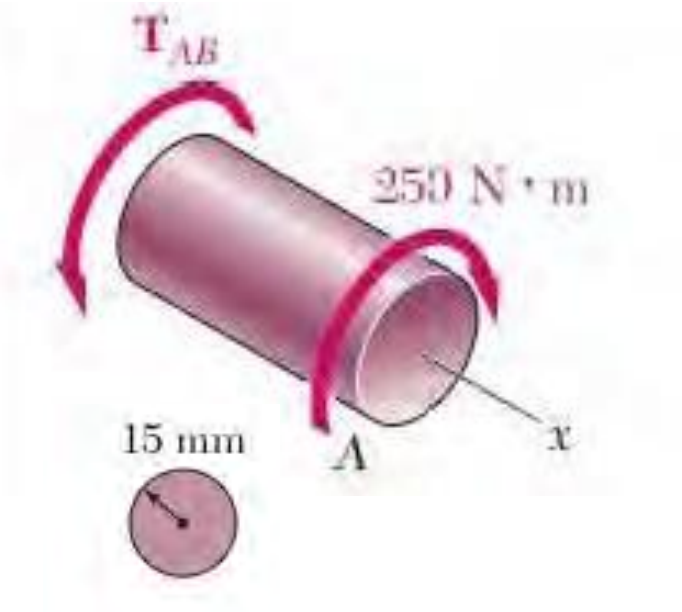
$$\emptyset = \sum_i \frac{T_i L_i}{G_i J_i}$$

فصل سوم : تئوری پیچش

مثال ۸: زاویه پیچش نقطه A چقدر است؟(G=77GPa)



فصل سوم : تئوری پیچش



حل:

$$\sum T = 0 \rightarrow 250 - T_{AB} = 0 \rightarrow T_{AB} = 250N.m$$

$$\emptyset_{AB} = \frac{T_{AB}L_{AB}}{G_{AB}J_{AB}}$$

L_{AB}=0.4m

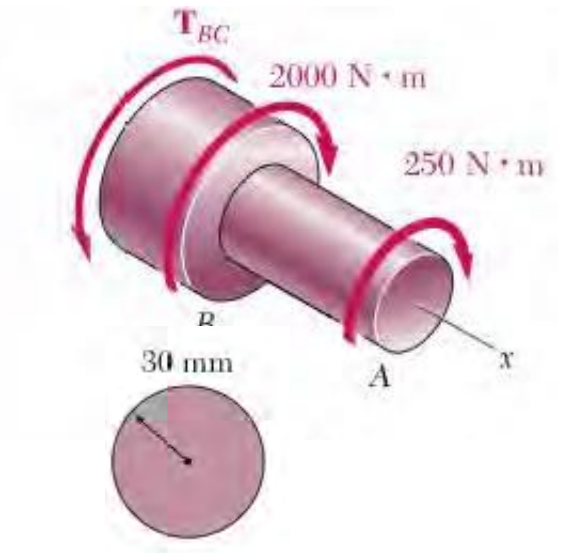
G=77GPa=77×10^9Pa

D=30mm→R=15mm=0.015m

$$J = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{3.14 \times 0.015^4}{2} = 7.94 \times 10^{-8} m^4$$

فصل سوم : تئوری پیچش

$$\emptyset_{AB} = \frac{\boldsymbol{T_{AB}L_{AB}}}{\boldsymbol{G_{AB}J_{AB}}} \rightarrow \emptyset_{AB} = \frac{250\times0.4}{77\times10^{9}\times7.94\times10^{-8}} \rightarrow \emptyset_{AB} = \frac{100}{6113.8} = 0.016rad$$



$$\sum T = 0 \rightarrow 250 + 2000 - T_{BC} = 0 \rightarrow T_{BC} = 2250N.m$$

$$\emptyset_{BC} = \frac{\boldsymbol{T_{BC}L_{BC}}}{\boldsymbol{G_{BC}J_{BC}}}$$

L_{BC}=0.2m

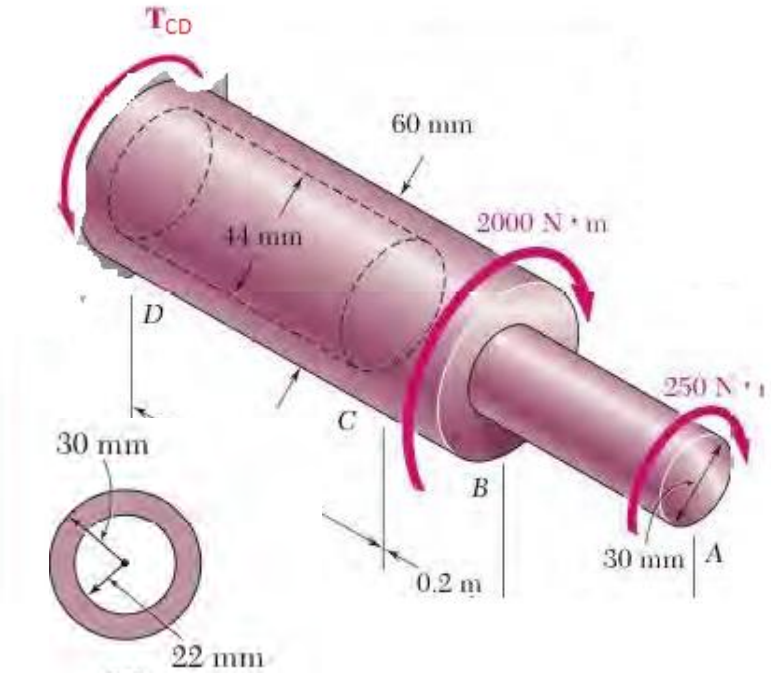
G=77GPa=77×10^{9}Pa

D=60mm→R=30mm=0.03m

$$J = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{3.14 \times 0.03^4}{2} = 1.27 \times 10^{-6}m^4$$

فصل سوم : تئوری پیچش

$$\emptyset_{BC} = \frac{\boldsymbol{T_{BC}L_{BC}}}{\boldsymbol{G_{BC}J_{BC}}} \rightarrow \emptyset_{BC} = \frac{2250\times0.2}{77\times10^{9}\times1.27\times10^{-6}} \rightarrow \emptyset_{BC} = \frac{450}{97790} = 0.004rad$$



$$\sum T = 0 \rightarrow 250 + 2000 - T_{CD} = 0 \rightarrow T_{CD} = 2250N.m$$

$$\emptyset_{CD} = \frac{\boldsymbol{T_{CD}L_{CD}}}{\boldsymbol{G_{CD}J_{CD}}}$$

L_{CD}=0.6m

G=77GPa=77×10^{9}Pa

D_2=60mm→R_2=30mm=0.03m

D_1=44mm→R_2=22mm=0.022m

فصل سوم : تئوری پیچش

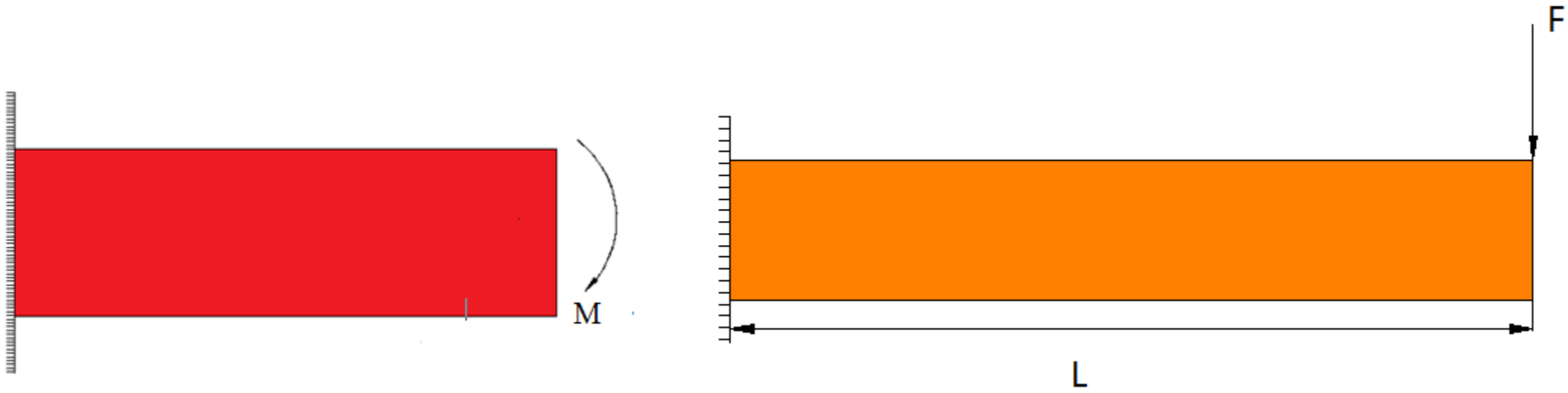
$$J = \frac{\pi}{2}({R_2}^4 - {R_1}^4) \rightarrow J = \frac{3.14}{2}(0.03^4 - 0.022^4) \rightarrow J = 9.04 \times 10^{-7} m^4$$

$$\emptyset_{CD} = \frac{\boldsymbol{T_{CD} L_{CD}}}{\boldsymbol{G_{CD} J_{CD}}} \rightarrow \emptyset_{CD} = \frac{2250 \times 0.6}{77 \times 10^9 \times 9.04 \times 10^{-7}} \rightarrow \emptyset_{CD} = \frac{450}{69608} = 0.006 rad$$

$$\emptyset_A = \emptyset_{AB} + \emptyset_{BC} + \emptyset_{CD} = 0.016 + 0.004 + 0.006 \rightarrow \emptyset_A = 0.026 \text{rad}$$

فصل چهارم : تئوری خمش

در اثر گشتاور خمشی تنش عمودی در جسم بوجود می آید که تنش ناشی از خمش نام دارد.



فصل چهارم : تئوری خمش

$$\sigma = \frac{MC}{I}$$

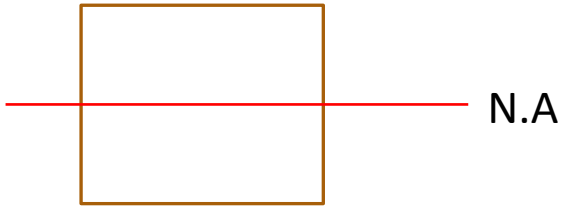
در این معادله M گشتاور خمشی بر حسب N.m

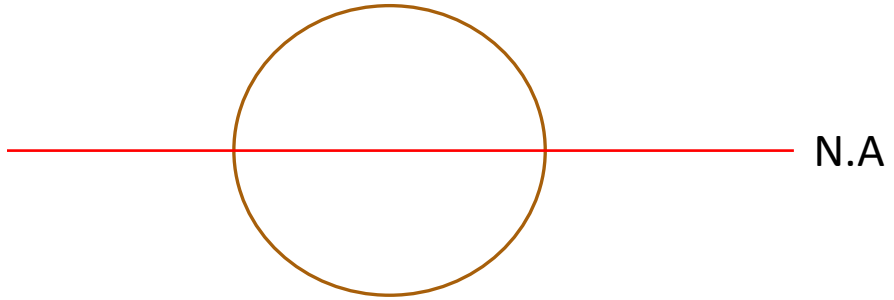
C فاصله تا تارخنثی بر حسب m

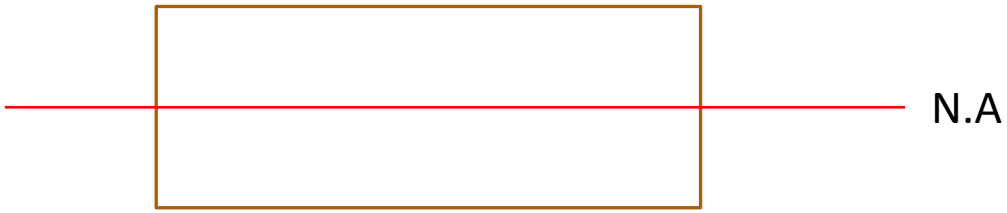
I ممان اینرسی سطح

فصل چهارم : تئوری خمش

تار خنثی از مرکز سطح یک شکل عبور میکند. برای اشکال هندسی دایره و مربع و مستطیل این محور از مرکز آنها میگذرد

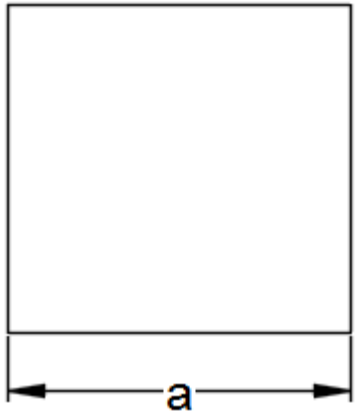




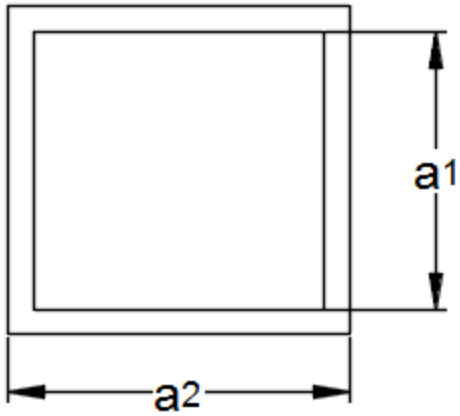


فصل چهارم : تئوری خمش

ممان اینرسی سطح برای بعضی اشکال هندسی آورده شده است.

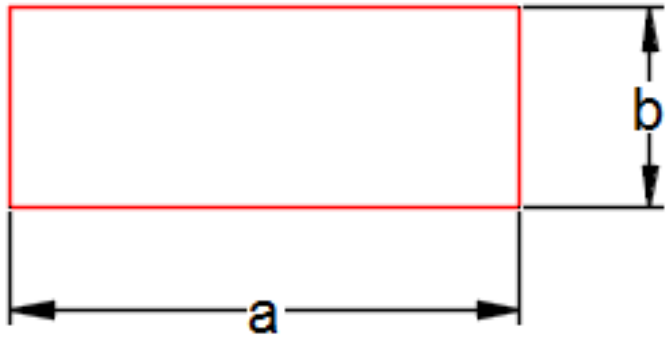


$$I = \frac{a^4}{12}$$

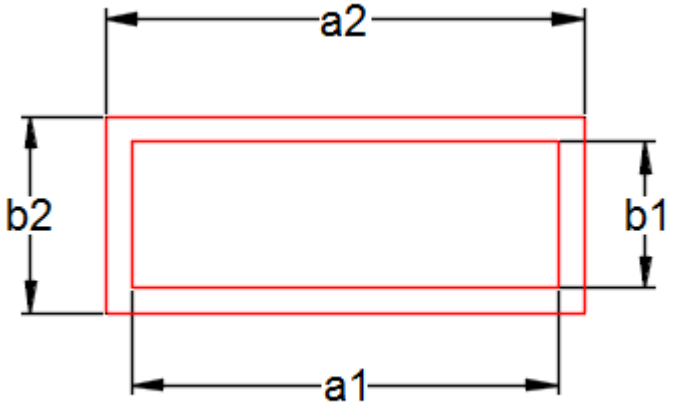


$$I = \frac{{a_2}^4 - {a_1}^4}{12}$$

فصل چهارم : تئوری خمش

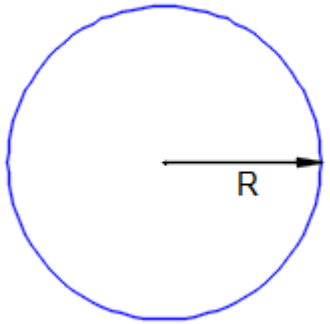


$$I = \frac{ab^3}{12}$$

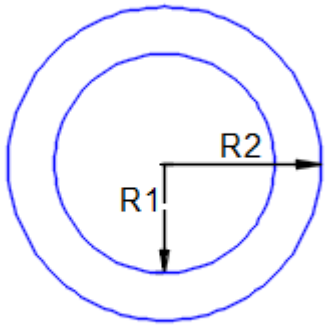


$$I = \frac{a_2 {b_2}^3 - a_1 {b_1}^3}{12}$$

فصل چهارم : تئوری خمش



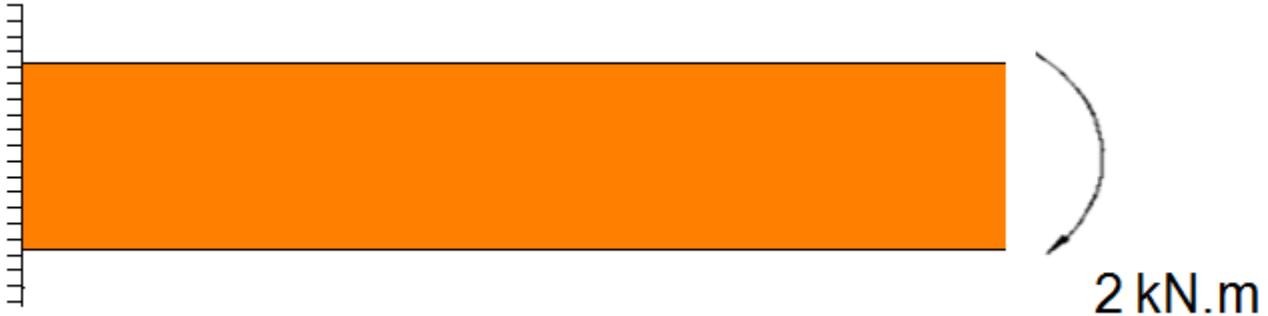
$$I = \frac{\pi R^4}{4}$$

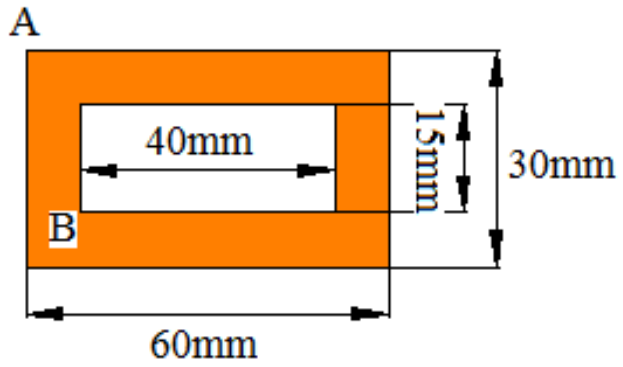


$$I = \frac{\pi}{4}(R_2{}^4 - R_1{}^4)$$

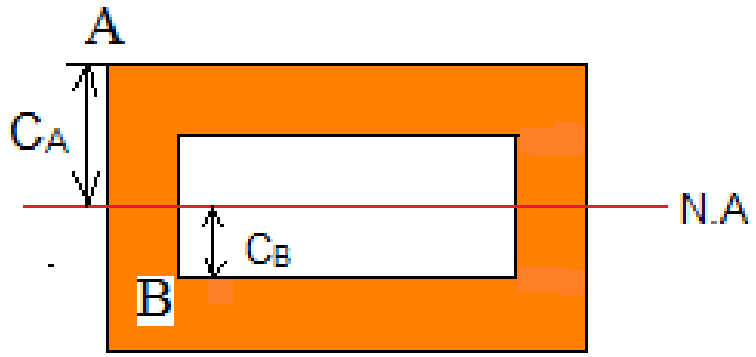
فصل چهارم : تئوری خمش

مثال۹: تنش ایجاد شده بواسطه گشتاور خمشی را در نقاط A و B حساب کنید.





فصل چهارم : تئوری خمش



$$\sigma_A = \frac{MC_A}{I}$$

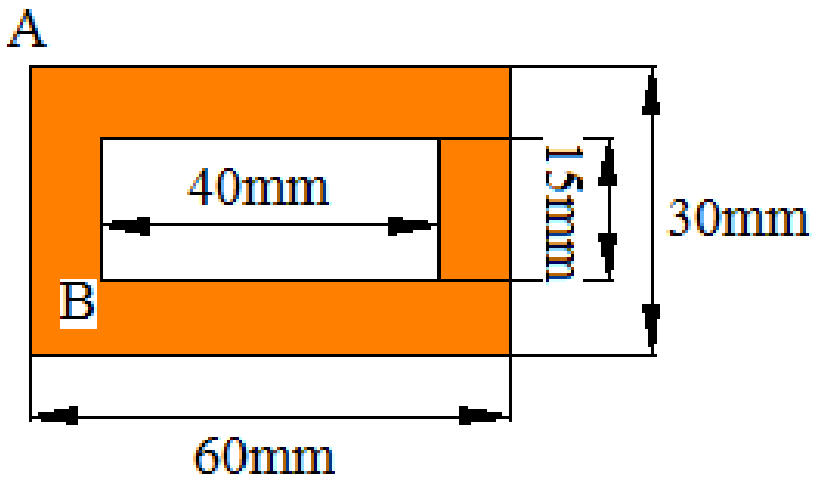
$$\sigma_B = \frac{MC_B}{I}$$

M=2kN.m=2000N.m

C_A=30÷2=15mm=0.015m

C_B=15÷2=7.5mm=0.0075m

فصل چهارم : تئوری خمش



$$I=\frac{a_2 {b_2}^3-a_1 {b_1}^3}{12}$$

a_2=60mm=0.06m b_2=30mm=0.03m

a_1=40mm=0.04m b_1=15mm=0.015m

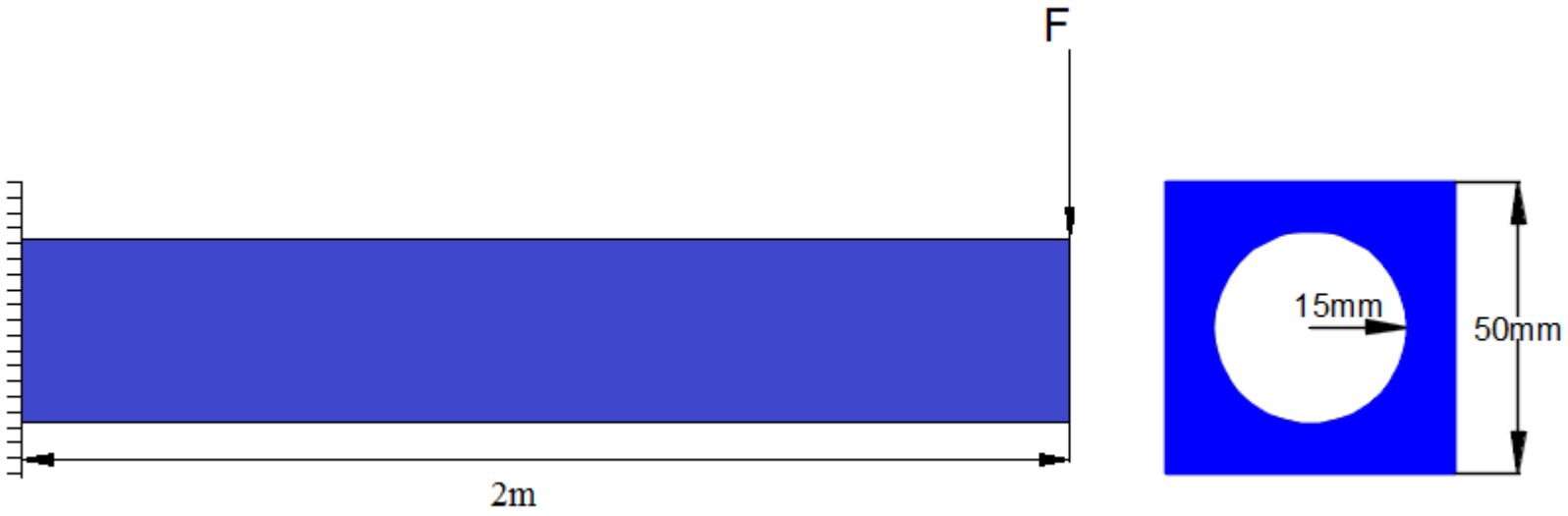
$$I=\frac{0.06\times 0.03^3-0.04\times 0.015^3}{12}=1.23\times 10^{-7}$$

$$\sigma_A=\frac{MC_A}{I}=\frac{2000\times 0.015}{1.23\times 10^{-7}}=243.9\times 10^6\text{Pa}\rightarrow \sigma_A=243.9\text{MPa}$$

$$\sigma_B=\frac{MC_B}{I}=\frac{2000\times 0.0075}{1.23\times 10^{-7}}=121.9\times 10^6\text{Pa}\rightarrow \sigma_B=121.9\text{MPa}$$

فصل چهارم : تئوری خمش

مثال10: تیری مطابق شکل تحت اثر نیروی خمشی قرار گرفته است. اگر این تیر از فولادی با تنش نهایی 410MPa و ضریب اطمینان 2ساخته شده باشد حداکثر نیروی اعمالی به انتهای تیر چقدر می تواند باشد؟



فصل چهارم : تئوری خمش

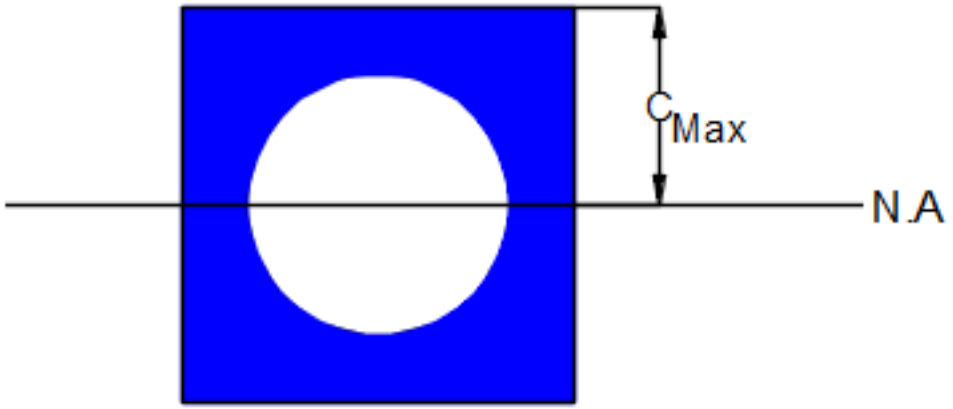
حل:

$\sigma_U = 410\text{MPa} \qquad \text{F.S} = 2 \qquad \text{L} = 2\text{m} \qquad \text{F} = ?$

$$F.S = \frac{\sigma_U}{\sigma_{all}} \rightarrow 2 = \frac{410}{\sigma_{all}} \rightarrow \sigma_{all} = \frac{410}{2} = 205MPa$$

$$\sigma_{Max} = \sigma_{all} = 205MPa \rightarrow \sigma_{Max} = 205 \times 10^6 Pa$$

فصل چهارم : تئوری خمش



C_{max}=50÷2=25mm=0.025m

$$I = I_{\text{مربع}} - I_{\text{دایره}}$$

$$I = \frac{a^4}{12} - \frac{\pi R^4}{4}$$

$$a = 50mm = 0.05m$$

$$R = 15mm = 0.015m$$

$$I = \frac{a^4}{12} - \frac{\pi R^4}{4} \rightarrow I = \frac{0.05^4}{12} - \frac{3.14 \times 0.015^4}{4} \rightarrow I = 4.81 \times 10^{-7}$$

فصل چهارم : تئوری خمش

$$\sigma_{Max} = \frac{MC_{Max}}{I} \rightarrow 205 \times 10^6 = \frac{M \times 0.025}{4.81 \times 10^{-7}} \rightarrow M = \frac{205 \times 10^6 \times 4.81 \times 10^{-7}}{0.025}$$

$$M = 3944N.m$$

$$M = FL \rightarrow F = \frac{M}{L} \rightarrow F = \frac{3944}{2} \rightarrow F = 1972N$$