ریاضیات و کاربرد آن در مدیریت

فصل اول « انتگرال »

انتگرال نامعین: اگر $F(x)$ یک تابع اولیه $f(x)$ در دامنه I باشد آنگاه عبارت $F(x)+C$ را انتگرال نامعین $f(x)$ گویند و بصورت زیر نمایش می‌دهیم.

$$\int f(x)dx = F(x)+C$$

تابع اولیه: تابع $F(x)$ را یک تابع اولیه یا ضد مشتق یا پاد مشتق $f(x)$ در بازه I می‌نامیم اگر برای هر x از I داشته باشیم

$$F'(x) = f(x)$$

مثال: یک تابع اولیه برای تابع $f(x)=3x^2$ بدست آورید.

$$F'(x) = (x^3)' = 3x^2$$

$$F(x) = x^3+1 \quad , \quad F(x) = x^3-7$$

قضیه: اگر تابع f در بازه I پیوسته باشد آنگاه روی I دارای تابع اولیه و در نتیجه دارای انتگرال نامعین است.

قضیه: اگر $F(x)$ یک تابع اولیه $f(x)$ در بازه I باشد آنگاه

1) $\left(\int f(x)dx\right)' = \frac{d}{dx}\left(F(x)+C\right) = f(x)$

2) $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$

3) $\int dF(x) = F(x)+C$

قضیه: اگر $f(x)$ و $g(x)$ توابعی انتگرال پذیر در بازه I باشند آنگاه

$$\int (f(x) \mp g(x))dx = \int f(x)dx \mp \int g(x)dx$$

قضیه: اگر K یک عدد ثابت، و $f(x)$ تابعی انتگرال پذیر روی I باشد آنگاه

$$\int K f(x)\, dx = K\int f(x)dx$$

روابط کلی انتگرال:

1) $\int 1.dx = x+c$ $\qquad$ $\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}+c \quad n\neq -1$

$\int \dfrac{dx}{x} = \ln x + c$ $\qquad$ $\int \sin x\,dx = -\cos x + c$

2) $\int \cos x\,dx = \sin x + c$ $\qquad$ $\int (1+\tan^2 x)\,dx = \int \sec^2 x\,dx = \tan x + c$

$\int (1+\cot^2 x)\,dx = \int \csc^2 x\,dx = -\cot x + c$ $\qquad$ $\int \sec x.\tan x\,dx = \sec x + c$

$\int \csc x.\cot x = -\csc x + c$ $\qquad$ $\int e^x\,dx = e^x + c$

3 $\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + c \quad a>0,\ a\neq 1$ $\qquad$ $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x + c$

$\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x + c$ $\qquad$ $\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x| + c$

$\int \cot x\,dx = \ln|\sin x| + c$ $\qquad$ $\int \dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \sin^{-1}\dfrac{x}{a} + c$

$\int \dfrac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx = \ln\left|x+\sqrt{a^2+x^2}\right| + c$ $\qquad$ $\int \dfrac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + c$

$\int \dfrac{1}{a^2+x^2} = \dfrac{1}{a}\tan^{-1}\dfrac{x}{a} + c$ $\qquad$ $\int \dfrac{1}{a^2-x^2}\,dx = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{a+x}{a-x}\right| + c$

مثال: انتگرال های نامعین زیر را حساب کنید

$$\int 3x^2 - 4x + 2\,dx = \frac{3x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} + 2x + c$$

$$\int \left(x^2\sqrt{x} - \frac{3}{\sqrt{4-x^2}}\right)dx = \int x^{\frac{5}{2}}\,dx - 3\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \left(\frac{x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} - 3\sin^{-1}\frac{x}{a}\right) + c$$

مثال: انتگرال های نامعین زیر را محاسبه کنید

۱) $\int \frac{x^4+2x^3-3x^2+4x-5}{x^2}\,dx$

$= \int \left(x^2+2x-3+\frac{4}{x}-\frac{5}{x^2}\right)dx = \frac{x^3}{3}-\frac{2x^2}{2}-3x+4\ln x+\frac{5}{x}+C$

۲) $\int \left(2^x-5\sin x+\frac{4}{3+x^2}\right)dx$

$= \frac{2^x}{\ln 2}-5(-\cos x)+\frac{4}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)+C$

مثال: تابع اولیه‌ای مانند $F(x)$ برای $f(x)=3x^2+2x+6$ به قسمی تعیین کنید که $F(0)=5$

$F(x)=\int f(x)dx=\int(3x^2+2x+6)\,dx = x^3+x^2+6x+C$

$F(0)=0+C=5 \rightarrow C=5$

روش های انتگرال گیری:

۱) روش تغییر متغیر (جانشینی)

قضیه: فرض کنید $g(x)$ تابعی مشتق پذیر از x، و $g(x)\in I$ باشد بطوری که $f(x)$ روی I تعریف شده، و $F(x)$ یک تابع اولیه $f(x)$ بر I باشد. در این صورت اگر قرار دهید $u=g(x)$

$\int f(g(x))\,g'(x)\,dx=\int f(u)\,du=F(u)+C=F(g(x))+C$

اگر u عبارتی از x باشد داریم.

$\int du=u+C$ $\qquad$ $\int u^n du=\frac{u^{n+1}}{n+1}+C$

$\int \frac{du}{u}=\ln|u|+C$ $\qquad$ $\int \sin u\,du=-\cos u+C$

$\int \sec^2 u\,du=\tan u+C$ $\qquad$ $\int \csc^2 u\,du=-\cot u+C$

$\int e^u du=e^u+C$ $\qquad$ $\int a^u du=\frac{a^u}{\ln a}+C \quad a>0,\ a\neq 1$

$\int \sec u \cdot \tan u \, du = \sec u + c$

$\int \csc u \cdot \cot u \, du = -\csc u + c$

$\int \frac{du}{1+u^2} = \tan^{-1} u + c$

$\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \sin^{-1} u + c$

مثال:

$$1)\ \int 2x \cdot e^{x^2} dx = \int e^u du = e^u + c = e^{x^2} + c$$

$$\begin{cases} u = x^2 \\ du = 2x\,dx \end{cases}$$

$$2)\ \int \sin 5x \, dx = \int \sin u \cdot \frac{du}{5} = -\frac{1}{5}\cos u + c = -\frac{\cos 5x}{5} + c$$

روش جزء به جزء: می‌دانیم که اگر u و v دو تابع از x باشند مشتق، دیفرانسیل تابع حاصلضرب بصورت زیر تعریف می‌شود

$$(uv)' = u'v + v'u$$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

مثال: با استفاده از روش جزء به جزء انتگرال $\int x \cdot e^{2x} dx$ را محاسبه کنید

$$\int x \cdot e^{2x} dx = x\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right) - \frac{1}{2}\int e^{2x} dx = \frac{x}{2}e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + c$$

$$\begin{cases} u = x \rightarrow du = dx \\ e^{2x} dx = dv \rightarrow \frac{1}{2}e^{2x} = v \end{cases}$$

مثال حالت الف

$$\int \frac{5x-2}{x^2-4}\,dx$$

$$\frac{5x-2}{x^2-4} = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+B(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{(A+B)x+2A-2B}{(x-2)(x+2)}$$

$$\begin{cases} A+B=5 \\ 2A-2B=-2 \end{cases} \Rightarrow A=2\ ,\ B=3 \Rightarrow \frac{2}{x-2}+\frac{3}{x+2}$$

$$\int \frac{5x-2}{x^2-4}\,dx = \int \frac{2}{x-2}\,dx + \int \frac{3}{x+2}\,dx = 2\ln|x-2| + 3\ln|x+2| + C$$

مثال حالت ب

$$\int \frac{x^2-3x-7}{(2x+3)(x+1)^2}\,dx$$

$$\frac{x^2-3x-7}{(2x+3)(x+1)^2} = \frac{A_1}{(2x+3)} + \frac{A_2}{(x+1)} + \frac{A_3}{(x+1)^2} = \frac{(A_1+2A_2)x^2+(2A_1+5A_2+2A_3)x+A_1+3A_2+3A_3}{(2x+3)(x+1)^2}$$

$$\begin{cases} A_1+2A_2=1 \\ 2A_1+5A_2+2A_3=-3 \\ A_1+3A_2+3A_3=-7 \end{cases} \Rightarrow A_1=-1\ ,\ A_2=1\ ,\ A_3=-3$$

$$\int \frac{-1}{(2x+3)}\,dx + \int \frac{1}{(x+1)}\,dx + \int \frac{-3}{(x+1)^2} = -\ln|2x+3| + \ln|x+1| + \frac{3}{x+1} + C$$

$$= \ln\left|\frac{x+1}{2x+3}\right| + \frac{3}{x+1} + C$$

مثال حالت سوم

$$\int \frac{2x-4}{(x-1)^2(x^2+1)}\,dx$$

$$\frac{2x-4}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3x+A_4}{x^2+1} = \frac{(A_1+A_3)x^3+(-A_1+A_2-2A_3+A_4)x^2+(A_1+A_3-2A_4)}{(x-1)^2(x^2+1)}$$

$$+ \frac{\cancel{(A_3x+A_4)(x-1)}(-A_1+A_2+A_4)}{}$$

بنابراین ،

$$\begin{cases} A_1 + A_3 = 0 \\ -A_1 + A_2 - 2A_3 + A_4 = 0 \\ A_1 + A_3 - 2A_4 = 2 \\ A_2 - A_1 + A_4 = -4 \end{cases} \Rightarrow A_1 = 2 \ , \ A_2 = -1 \ , \ A_3 = -2 \ , \ A_4 = -1$$

$$\frac{2x-4}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{2}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{-2x-1}{x^2+1}$$

درنتیجه

$$\int \frac{2x-4}{(x-1)^2(x^2+1)}dx = \int \frac{2}{(x-1)}dx - \int \frac{dx}{(x-1)^2} - \int \frac{2x+1}{x^2+1}dx = 2\ln|x-1| + \frac{1}{x-1} - \ln(x^2+1)$$
$$-\tan^{-1}x + c$$

مثال برای حالت چهارم ،

$$\int \frac{t^3}{(t^2+4)^2}dt$$

$$\frac{t^3}{(t^2+4)^2} = \frac{A_1t+B_1}{t^2+4} + \frac{A_2t+B_2}{(t^2+4)^2} = \frac{A_1t^3 + B_1t^2 + (4A_1 + A_2)t + B_2 + 4B_1}{(t^2+4)^2}$$

$$\begin{cases} A_1 = 1 \\ B_1 = 0 \\ 4A_1 + A_2 = 0 \\ B_2 + 4B_1 = 0 \end{cases} \rightarrow A_1 = 1 \ , \ A_2 = -4 \ , \ B_1 = B_2 = 0$$

$$\int \frac{t^3}{(t^2+4)^2}dt = \int \frac{t}{t^2+4}dt - 4\int \frac{t}{(t^2+4)^2}dt = \frac{1}{2}\ln|t^2+4| - \frac{2}{t^2+4} + c$$

تذکر : اگر تابع انتگرال شامل توان های کسری از متغیر x باشد ، می توان آن را با تغییر متغیر $x = z^n$ ساده کرد که در آن n کوچکترین مضرب مشترک مخرج توان های موجود در انتگرال است .

مثال:

$$\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{1+\sqrt[4]{x^3}} = ?$$

توان های x $\longleftarrow$ $\frac{1}{2}$ و $\frac{3}{4}$ کوچکترین مضرب مشترک مخرج این کسرها عدد ۴ است. پس تغییر متغیر $x = z^4$

$$\Rightarrow dx = 4z^3 dz$$

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x^3}}\,dx = \int \frac{z^2(4z^3dz)}{1+z^3} = 4\int \frac{z^5}{z^3+1}\,dz = 4\int \left(z^2 - \frac{z^2}{z^3+1}\right)dz$$

$$= 4\int z^2 dz - 4\int \frac{z^2}{z^3+1}\,dz = \frac{4}{3}z^3 - \frac{4}{3}\ln|z^3+1| + C =$$

نکته: اگر تابع انتگرال شامل توان های کسری از عبارت $(ax+b)$ باشد، می‌توان آن را با تغییر متغیر $ax+b = z^n$ ساده کرد، که در آن n کوچکترین مضرب مشترک مخرج توان ها است.

مثال:

$$\int \frac{x}{(2x+1)^{\frac{3}{2}}}\,dx$$

توان $\frac{3}{2}$ $\longrightarrow$ $n=2$ $\longrightarrow$ $z^2 = 2x+1$

$$z^2 = 2x+1 \rightarrow 2z\,dz = 2dx$$

$$\Downarrow$$

$$x = \frac{z^2-1}{2} \qquad \frac{1}{2}\int \frac{(z^2-1)z}{z^3}\,dz = \frac{1}{2}\int \frac{z^3-z}{z^3}\,dz = \frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{z^2}\right)dz = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2z} + C$$

جلسه سوم

انتگرال معین

تعریف: اگر تابع $f(x)$ در بازه $[a,b]$ پیوسته باشد آنگاه $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i$ وجود دارد. در اینصورت $f(x)$ را در $[a,b]$ انتگرال پذیر گویند، و انتگرال معین تابع f در $[a,b]$ را بصورت $\int_a^b f(x)dx$ نشان می‌دهند.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i$$

b را حد بالا و a را حد پایین انتگرال گویند.

نکته: اگر یک تابع انتگرال پذیر باشد ممکن است آن تابع ناپیوسته باشد.

قضیه (قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال)

فرض کنید تابع f روی $[a,b]$ پیوسته است در اینصورت اگر $F'(x) = f(x)$ باشد آنگاه

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

قضیه: اگر f و g دو تابع پیوسته در $[a,b]$ و $a<c<b$ و k یک عدد حقیقی باشد آنگاه

۱) $\int_a^b k f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$

۲) $\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$

۳) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

۴) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

۵) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

مثال:

۱) $\int_1^4 \frac{dx}{3x+1} = \int_1^4 \frac{du}{3u} = \frac{1}{3}\ln(3x+1)\Big|_1^4 = \frac{1}{3}(\ln 13 - \ln 4) = \frac{1}{3}\ln \frac{13}{4}$

$3x+1 = u \rightarrow 3dx = du \Rightarrow dx = \frac{du}{3}$

۲) $\int_1^2 x^{\frac{3}{2}} \ln 3x\,dx = \int \left(\frac{z}{3}\right)^{\frac{3}{2}} . \ln z . \frac{dz}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{5}{2}} \int z^{\frac{3}{2}} . \ln z . dz = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{5}{2}} . \left(\frac{2}{5} z^{\frac{5}{2}} \ln z - \int \frac{2}{5} z^{\frac{3}{2}} dz\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{5}{2}} \left(\frac{2}{5} z^{\frac{5}{2}} \ln z - \frac{4}{25} z^{\frac{5}{2}} + C\right)$

$3x = z \rightarrow 3dx = dz \rightarrow dx = \frac{dz}{3}$

$x = \frac{z}{3}$

$$\begin{cases} z^{\frac{3}{2}} dz = dv \rightarrow v = \frac{2}{5} z^{\frac{5}{2}} \\ \ln z = u \rightarrow du = \frac{dz}{z} \end{cases}$$

$\int_{-5}^{1} |x+3|\,dx \qquad |x+3| = \begin{cases} x+3 & x \geq -3 \\ -(x+3) & x < -3 \end{cases}$

$$\int_{-5}^{1} |x+3|\,dx = \int_{-5}^{-3} -(x+3)\,dx + \int_{-3}^{1} (x+3)\,dx = -\left(\frac{x^2}{2}+3x\right)\Big|_{-5}^{-3} + \left(\frac{x^2}{2}+3x\right)\Big|_{-3}^{1} = 10$$

مثال: انتگرال معین تابع $f(x) = \begin{cases} 5x^2+1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 2x+4 & 1 < x \leq 3 \end{cases}$ را در بازه $[0,3]$ محاسبه کنید.

$$\int_0^3 f(x)\,dx = \int_0^1 (5x^2+1)\,dx + \int_1^3 (2x+4)\,dx = \frac{56}{3}$$

مثال: انتگرال معین $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x.\sec^2 x\,dx$ را محاسبه کنید.

$$\begin{cases} u = x \rightarrow du = dx \\ \sec^2 x\,dx = dv \rightarrow v = \tan x \end{cases} \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}} x.\sec^2 x\,dx = x.\tan x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,dx =$$

$$= \left(\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{4} - 0\right) - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = \frac{\pi}{4} + \ln\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} + \left(\ln \overset{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\cancel{\cos\frac{\pi}{4}}} - \ln \cancel{\cos 0}\right)$$

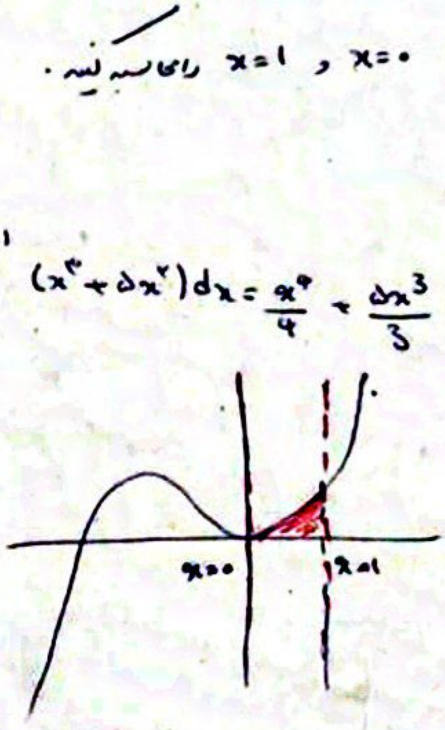
$= \frac{\pi}{4} + \ln\frac{\sqrt{2}}{2}$

① قضیه: اگر تابع f روی بازه $[a,b]$ نامنفی و پیوسته باشد، آنگاه مساحت A ناحیه محدود به نمودار $y=f(x)$، محور x ها و خطوط $x=a$, $x=b$ ← $A = \int_a^b f(x)\,dx$

مثال ۲: مساحت ناحیه محدود به نمودار $f(x) = x^3 + 5x^2$، محور x ها و خطوط $x=0$ و $x=1$ را محاسبه کنید.

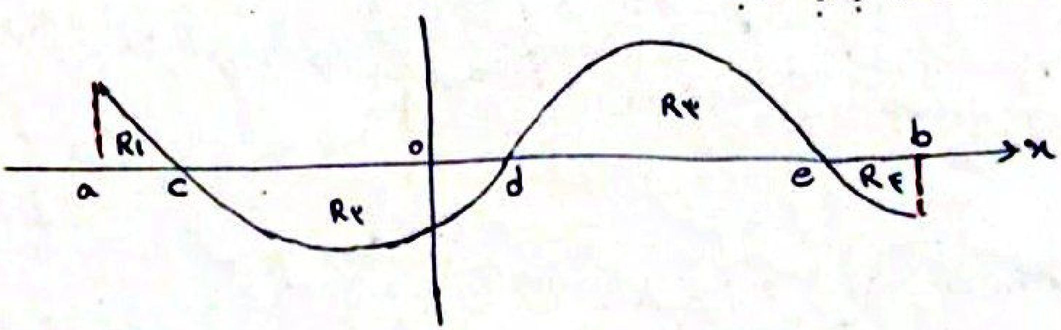
در بازه داده شده $[0,1]$ تابع f نامنفی است پس داریم

$$A = \int_0^1 (x^3+5x^2)\,dx = \frac{x^4}{4} + \frac{5x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{5}{3} = \frac{23}{12}$$



مساحت ناحیه محدود به نمودار f و محور x ها در بازه [a,b] در حالت کلی

فرض می‌کنیم نمودار تابع f در بازه [a,b] باشد. در این صورت A(R) مساحت ناحیه محصور بین نمودار $y=f(x)$ ، محور x ها و خط‌های $x=a$ و $x=b$ برابر است با



$$A(R)=A(R_1)+A(R_2)+A(R_3)+A(R_4)$$

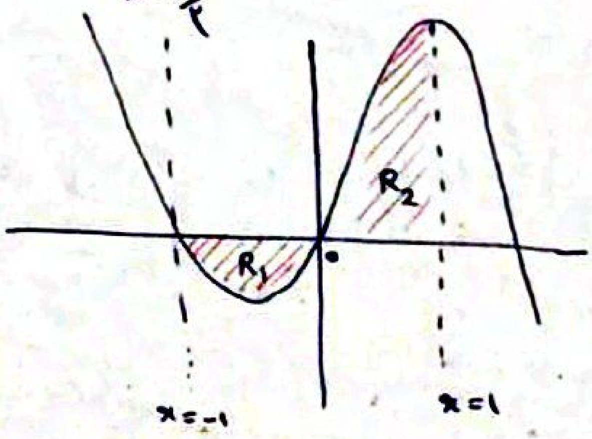
$$A(R)=\int_a^c f(x)\,dx-\int_c^d f(x)\,dx+\int_d^e f(x)\,dx-\int_e^b f(x)\,dx$$

$$A(R)=\left|\int_a^c f(x)\,dx\right|+\left|\int_c^d f(x)\,dx\right|+\left|\int_d^e f(x)\,dx\right|+\left|\int_e^b f(x)\,dx\right|$$

مثال: مساحت ناحیه محدود به نمودار تابع $f(x)=-x^3+x^2+2x$ ، محور x ها و خط‌های $x=-1$ و $x=1$ را بدست آورید.

$$f(x)=0 \rightarrow -x^3+x^2+2x=0 \Rightarrow -x(x^2+x-2)=0 \quad \begin{cases} x=0 \\ x=-1 \\ x=\frac{3}{2} \end{cases}$$

	-1	0	$\frac{3}{2}$	
x	$-$	0	$+$	
x^2-x-2	$+$ 0	$-$	$-$ 0	$+$



$$A(R)=\left|\int_{-1}^{0} f(x)\,dx\right|+\left|\int_{0}^{1} f(x)\,dx\right|=$$

$$=\left|\int_{-1}^{0}(-x^3+x^2+2x)\,dx\right|+\left|\int_{0}^{1}(-x^3+x^2+2x)\,dx\right|=\left|-\frac{5}{12}\right|+\left|\frac{13}{12}\right|=\frac{5}{12}+\frac{13}{12}=\frac{3}{2}$$

فصل سوم (ماتریس و دترمینان)

تعریف: هر آرایه ای از اعداد که تشکیل m سطر و n ستون باشد و اعداد هر سطر و هر ستون به نوعی با هم مرتبط باشند به آن یک ماتریس گویند. به ماتریسی که دارای m سطر و n ستون باشد ماتریس $m\times n$ گویند. نمایش عمومی چنین ماتریسی به صورت زیر است:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

اگر A یک ماتریس $m\times n$ باشد، A را به اختصار به صورت $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ نیز نمایش می دهند.

هر عدد در ماتریس یک درایه گویند. درایه a_{ij} یعنی عنصری که در سطر iام و ستون jام واقع شده است.

ماتریس های خاص

ماتریس سطری: ماتریسی که فقط یک سطر داشته باشد ماتریس سطری نام دارد مانند:

$$[a_{11}\ a_{12}\ \cdots\ a_{1k}]_{1\times k}$$

ماتریس ستونی: ماتریسی که فقط یک ستون داشته باشد، ماتریس ستونی نام دارد مانند:

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}_{n\times 1}$$

ماتریس صفر: ماتریسی که تمام عناصر آن صفر باشد را ماتریس صفر گویند. مانند:

$$O=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

ماتریس مربع: ماتریسی که تعداد سطرها و ستون‌های آن برابر باشند، ماتریس مربع نامیده می‌شود. مانند:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n}$$

نکته: ماتریس مربع $n\times n$ را ماتریس مربع مرتبه n گویند.

نکته: فرض کنید A یک ماتریس مربع باشد. تمام عناصری که در یک سطر و یک ستون مساوی قرار دارند تشکیل یک قطر فرضی در ماتریس را می‌دهند. این اعداد را عناصر قطر اصلی گویند. مانند

$$B=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \qquad C=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

ماتریس قطری: ماتریسی که تمام عناصر خارج قطر اصلی آن صفر باشند، ماتریس قطری نام دارد. مانند

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ماتریس اسکالر: ماتریس قطری که تمام عناصر روی قطر اصلی آن برابر باشند، ماتریس اسکالر نام دارد.

$$\begin{bmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{bmatrix}$$

ماتریس واحد: ماتریس اسکالری که تمام عناصر روی قطر اصلی آن واحد یک باشند، آن را ماتریس واحد (همانی، یکه) گویند و با I نشان می‌دهند.

ماتریس های همانی مرتبه n را با I_n نشان می‌دهند.

$$I_2=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

ماتریس بالا مثلثی: ماتریس مربعی که تمام عناصر واقع در زیر قطر اصلی آن صفر باشند، ماتریس بالا مثلثی نام دارد. اگر $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ یک ماتریس بالا مثلثی باشد همواره برای هر $i>j$ داریم: $a_{ij}=0$

$$\begin{bmatrix}1&5&3\\0&2&1\\0&0&0\end{bmatrix}\qquad\begin{bmatrix}1&5\\0&2\end{bmatrix}$$

ماتریس پایین مثلثی: " " " " " بالای " " پایین " " "

" " " " پایین " " $i<j$: $a_{ij}=0$

$$\begin{bmatrix}1&0\\3&0\end{bmatrix}$$

نکته: ماتریس های قطری و صفر، هم ماتریس بالا مثلثی و هم ماتریس پایین مثلثی هستند.

نکته: ماتریس های بالا مثلثی و پایین مثلثی را ماتریس های مثلثی نیز گویند.

ماتریس متقارن: فرض کنید A یک ماتریس مربع از مرتبه n باشد. اگر برای هر i,j داشته باشیم $a_{ij}=a_{ji}$، A را متقارن گویند. مانند:

$$\begin{bmatrix}2&1&3\\1&5&4\\3&4&7\end{bmatrix}$$

ماتریس پاد (شبه) متقارن: فرض کنید A یک ماتریس مربع مرتبه n باشد، A را ماتریس شبه متقارن گویند هرگاه به ازای هر i,j، $a_{ij}=-a_{ji}$ و به ازای هر $i=j$ داشته باشیم $a_{ii}=0$

$$\begin{bmatrix}0&-4&5\\4&0&3\\-5&-3&0\end{bmatrix}\qquad\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}$$

تساوی دو ماتریس

دو ماتریس A و B را مساوی گوییم اولاً هم مرتبه باشند ثانیاً درایه های نظیر آن‌ها باهم برابر باشند.

جمع دو ماتریس:

دو ماتریس A و B هنگامی جمع می‌شوند که هم مرتبه بوده و حاصل آن ماتریسی هم مرتبه با A (یا B) است. برای بدست آوردن ماتریس $C=A+B$ درایه های متناظر را باهم جمع می‌کنیم.

مثال

$$\begin{bmatrix}2&1&-1\\0&4&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3&1&5\\2&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&2&4\\2&5&1\end{bmatrix}$$

نکته: در حالت کلی اگر $A=[a_{ij}]_{n\times m}$ و $B=[b_{ij}]_{n\times m}$ آنگاه $C=[c_{ij}]_{n\times m}$ است که در آن $C=A+B$ و

$$c_{ij}=b_{ij}+a_{ij}$$

نکته: در تفریق دو ماتریس کافی است عناصر را از هم کم کنیم

مثال:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$$

ضرب یک عدد در یک ماتریس:

فرض کنید k یک اسکالر و A یک ماتریس باشد. آنگاه $KA=AK$ یک ماتریس هم مرتبه با A است و درایه‌های آن برابر ضرب K در تمام درایه‌های A است. یعنی اگر k اسکالر باشد و $A=[a_{ij}]_{n\times m}$ آنگاه $KA=[ka_{ij}]_{n\times m}$ می‌باشد،

$$K=4 \;,\quad A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow KA=4A=\begin{bmatrix} 8 & 4 & 20 \\ 0 & 4 & 24 \end{bmatrix}$$

ضرب دو ماتریس:

فرض کنید دو ماتریس $A=[a_{ij}]_{n\times p}$ و $B=[b_{ij}]_{p\times m}$ مفروض باشند. حاصلضرب AB ماتریسی است مانند C به طوری که $C=AB$ و C دارای n سطر و m ستون است یعنی:

$$C_{n\times m}=A_{n\times p}\cdot B_{p\times m}$$

برای بدست آوردن درایه c_{ij} ماتریس C کافی است تمام عناصر سطر i ام ماتریس A را در عناصر ستون j ام ماتریس B بصورت نظیر به نظیر ضرب کرده و حاصل را جمع کنیم. یعنی:

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$$

نکته ۱: حاصلضرب AB هنگامی تعریف می‌شود که تعداد ستون‌های ماتریس A با تعداد سطرهای ماتریس B برابر باشد. بنابراین در حالت کلی $AB\neq BA$ زیرا ممکن است AB تعریف شده باشد ولی BA تعریف نشده باشد.

نکته ۲: اگر A، B و C سه ماتریس باشند، $AB=AC$، نمی‌توان نتیجه گرفت که $B=C$ مثلا:

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \;,\quad B=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad C=\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

نکته ۳: اگر A، B و C سه ماتریس باشند و اعمال ضرب و جمع امکان پذیر باشد، داریم:

$$A(BC)=(AB)C \;,\quad A(B+C)=AB+AC$$

مثال: حاصلضرب AB را درصورت امکان بدست آورید ۳۲

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۱ & ۵ & ۰ \end{bmatrix}_{۲\times۳} \quad , \quad B=\begin{bmatrix} ۳ & -۱ \\ ۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}_{۳\times۲}$$

$$AB=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۱ & ۵ & ۰ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ۳ & -۱ \\ ۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۵ & ۶ \\ ۸ & ۹ \end{bmatrix}_{۲\times۲}$$

نکته: اگر I ماتریس یکه‌ای باشد به طوری که در آن AI تعریف شده باشد آنگاه $AI = A$

مهم

ترانهاده یک ماتریس

اگر A یک ماتریس $n\times m$ باشد، ترانهاده آن را با A' یا A^t نشان می‌دهند که مرتبه آن $m\times n$ است. یعنی اگر جای سطرها و ستون‌های ماتریس A را عوض کنند ماتریس A^t بوجود می‌آید مانند:

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۰ & ۴ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۵ \end{bmatrix} \qquad A^t=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \\ ۴ & ۵ \end{bmatrix}$$

خواص ترانهاده ماتریس‌ها:

۱) اگر K یک اسکالر و A یک ماتریس باشد آنگاه $(KA)^t = KA^t$

۲) اگر A ، B دو ماتریس باشند آنگاه $(AB)^t = B^tA^t$ مشروط براینکه AB و B^tA^t تعریف شده باشند

۳) اگر A و B دو ماتریس باشند آنگاه $(A\pm B)^t = A^t \pm B^t$ مشروط بر اینکه جمع دو ماتریس تعریف شده باشد

۴) اگر A یک ماتریس متقارن باشد آنگاه $A^t = A$

۵) اگر A یک ماتریس شبه متقارن باشد، آنگاه $A^t = -A$

ماتریس متعامد

ماتریس مربع مرتبه A را متعامد گویند هرگاه $AA^t = A^tA = I$ مانند

$$A=\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{۲}}{۲} & \frac{\sqrt{۲}}{۲} \\ -\frac{\sqrt{۲}}{۲} & \frac{\sqrt{۲}}{۲} \end{bmatrix} \qquad A^t=\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

ماتریس خودتوان

ماتریس مربع A را خودتوان گویند هرگاه عدد صحیح مثبتی مانند n یافت شود بطوری که:

$$A^n = A$$

که در آن $A^n = A\times A\times \dots \times A$ مانند ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۲ & -۲ & -۴ \\ -۱ & ۳ & ۴ \\ ۱ & -۲ & -۳ \end{bmatrix}$ که می‌توان نشان داد $A = A^۲$

اثر ماتریس (trace)

مجموع عناصر روی قطر اصلی یک ماتریس مربع مانند A را اثر A گویند و با $tr(A)$ یا $trac(A)$ نشان می‌دهند که از خواص آن عبارتند از:

$$tr(KA) = K\,tr(A) \quad , \quad tr(AB) = tr(BA)$$
(K یک عدد حقیقی)
$$tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$$

مثال ۸: اثر ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ را بیابید

$$tr(A) = 1 - 3 = -2$$

نکته: سطر ماتریس را با R، ستون ماتریس را با C نشان می‌دهند

دترمینان یک ماتریس

فرض کنید مجموعه $M_{n\times n}$، مجموعه تمام ماتریس‌های مربع باشد. دترمینان یک ماتریس مربع A را با $\det A$ یا $|A|$ نشان می‌دهند و عبارت است از تابعی که از $M_{n\times n}$ به مجموعه اعداد حقیقی تعریف می‌شود یعنی اینکه به هر ماتریس مربع از $M_{n\times n}$ یک عدد حقیقی نسبت می‌دهد.

نکته: می‌دانیم که $a \in R$ یک ماتریس 1×1 است. یعنی هر عدد حقیقی یک ماتریس 1×1 است. در اینصورت $\det a = a$. یعنی دترمینان یک عدد، خود آن عدد است

دترمینان ماتریس ۲×۲

فرض کنید $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ یک ماتریس مربع مرتبه ۲ باشد در اینصورت:

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

همسازه

همسازه عنصر a_{ij} در ماتریس $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ را با A_{ij} نشان می‌دهند و $A_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ij}|$

برای محاسبه دترمینان یک ماتریس می‌توان آن را بر حسب ستون یا هر سطر دلخواه بسط داد نتیجه حاصل همواره یک عدد است که همان $|A|$ است و

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}|M_{ij}|$$

مثال ۹: دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & 6 & 1 \end{bmatrix}$ را بر حسب ستون دوم بدست آورید.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2} \times 2 \times \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} \times 5 \times \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2} \times 6 \times \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$-2(3-2) + 5(1+1) - 6(2+3) = -22$$

دستور ساروس برای دترمینان های ۳×۳

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 6 & 1 & 1 & 6 \end{array}\right|$$

$$\left[(1\times5\times1)+(2\times2\times1)+(-1\times3\times6)\right]-\left[(-1\times5\times1)+(1\times2\times6)+(2\times3\times1)\right]$$

$$=-9-13=-22$$

خواص دترمینان

۱) اگر A^t ترانهاده A باشد آنگاه $|A^t|=|A|$

۲) اگر ماتریس دلخواه A دارای یک سطر یا ستون صفر باشد آنگاه $\det A=0$

۳) اگر دو سطر یا دو ستون ماتریس دلخواه A مساوی باشند آنگاه $\det A=0$

۴) اگر دو سطر یا دو ستون ماتریس دلخواه A مضرب هم باشند آنگاه $\det A=0$

۵) اگر تمام عناصر یک سطر یا ستون یک ماتریس را در یک عدد مانند k ضرب کنیم آنگاه دترمینان ماتریس k برابر می‌شود.

۶) اگر جای دو سطر (ستون) دترمینان عوض شود علامت دترمینان عوض می‌شود

۷) اگر مضربی از یک سطر (ستون) را به سطر (ستون) دیگر دترمینان اضافه کنیم تأثیری در دترمینان ندارد

۸) دترمینان ماتریس های مثلثی و قطری برابر حاصلضرب عناصر روی قطر است

۹) $\det I=1$ و اگر A یک ماتریس متعامد باشد $\det A=\pm1$

۱۰) $|AB|=|A||B|$

ماتریس نامنفرد

اگر $\det A\neq0$ باشد، A را ماتریس نامنفرد گویند مانند $A=\begin{bmatrix}2&5\\4&10\end{bmatrix}$ و اگر $\det A=0$ باشد A را ماتریس منفرد گویند مانند

$$A=\begin{bmatrix}3&5\\4&10\end{bmatrix}$$

وارون ماتریس

فرض کنید $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ یک ماتریس مربع مرتبه n باشد، اگر ماتریس مربعی مانند $B=[b_{ij}]_{n\times n}$ موجود باشد بطوری که:

$$AB=BA=I_n$$

آنگاه B را وارون ماتریس A گویند. وارون ماتریس A را با A^{-1} نشان می‌دهند و وارون یک ماتریس در صورت وجود منحصر بفرد است.

نکته: اگر A یک ماتریس منفرد باشد، A وارون پذیر نیست.

وارون یک ماتریس ۲×۲ مانند $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ بصورت زیر است:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \qquad |A|=ad-bc$$

$=\text{adj}\,A$ ماتریس الحاقی ماتریس A

برای بدست آوردن ماتریس الحاقی مرتبه ۳ به بالا بصورت زیر عمل می کنیم:

۱) همساره های ماتریس A یعنی A_{ij} را بیابید
۲) با همساره های بدست آمده یک ماتریس بسازید.
۳) ترانهاده ماتریس همساره ها را بدست آورید که آن را ماتریس الحاقی می گویند و با نماد A یا $\text{adj}\,A$ نشان می دهند.

اعمال سطری مقدماتی

هر یک از اعمال زیر را که روی سطرهای یک ماتریس انجام گیرد اعمال سطری مقدماتی گویند

۱) تعویض جای دو سطر $(R_i \longleftrightarrow R_j)$

۲) ضرب یک سطر در یک عدد غیر صفر $(KR_i \longrightarrow R_i)$

۳) اضافه کردن مضرب غیر صفری از یک سطر به سطر دیگر $(KR_i+R_j \longrightarrow R_j)$

نکته: اگر A باشد آنگاه $\det A$ $A(\text{adj}\,A)=(\det A)I_n$

خواص وارون ماتریس ها:

۱) اگر A و B وارون پذیر بوده و AB تعریف شده باشد $.(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

۲) اگر A^t ترانهاده ماتریس A باشد و A، A^t وارون پذیر باشد

$$(A^t)^{-1}=(A^{-1})^t$$

۳) $(A^{-1})^{-1}=A$

۴) $\det A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}$

مثال: وارون ماتریس $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ را در صورت وجود بیابید.

ابتدا دترمینان A را حساب کرده اگر $|A|\neq 0$ آنگاه وارون آن را بدست می آوریم. این ماتریس را بحسب ستون اول بسط می دهیم

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2} \times 2 \times \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + 0 + (-1)^{3+2} \times 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 20$$

• $\det A \neq$ ← A وارون دارد.

حال همسازه های A را بدست می‌آوریم

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -5$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 14 \quad , \quad A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -5 \quad , \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \quad , \quad A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 10$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -8 \quad , \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 2$$

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} -5 & -5 & 10 \\ 14 & -2 & -8 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \operatorname{adj}(A) = \frac{1}{20} \times \begin{bmatrix} -5 & -5 & 10 \\ 14 & -2 & -8 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} =$$

روش دوم برای بدست آوردن A^{-1}:

$$A \cdot I = AI \cdot A^{-1}$$

با استفاده از عملیات سطری مقدماتی A^{-1} را می‌یابیم

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[-2R_1+R_3 \to R_3]{R_1+R_2 \to R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{3R_2+2R_3 \to R_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & -1 & 3 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[\frac{1}{20}R_3 \to R_3]{\frac{1}{2}R_2 \to R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{20} & \frac{3}{20} & \frac{2}{20} \end{array}\right] \xrightarrow[-3R_3+R_1 \to R_1]{-4R_3+R_2 \to R_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & \frac{23}{20} & -\frac{9}{20} & -\frac{6}{20} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{14}{20} & -\frac{2}{20} & -\frac{8}{20} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{20} & \frac{3}{20} & \frac{2}{20} \end{array}\right] \xrightarrow{-2R_2+R_1 \to R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{20} & -\frac{5}{20} & +\frac{10}{20} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{14}{20} & -\frac{2}{20} & -\frac{8}{20} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{20} & \frac{3}{20} & \frac{2}{20} \end{array}\right] = A^{-1}$$

فصل سوم دستگاه معادلات خطی و توابع خطی

تعریف: یک معادله به صورت $a_1x_1+\cdots+a_nx_n=0$ را معادله خطی n مجهولی گویند و هر n تایی $(x_1,\dots,x_n)$ که x_i ها عدد حقیقی هستند و در معادله بالا صدق کند، را یک جواب گویند.

تعریف: مجموعه معادلات خطی

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

که دارای جواب یکسان باشند را دستگاه m معادله خطی n مجهولی گویند (a_{ij} ها اعداد ثابت هستند)

شکل ماتریسی دستگاه فوق به صورت $AX=B$ که در آن $X=\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n\times 1}$ (ماتریس مجهولات) و $B=\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}_{m\times 1}$ (ماتریس اعداد ثابت) و $A=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$ (ماتریس ضرایب) می باشد. مانند دستگاه $\begin{cases} 2x-3y=5 \\ x+4y=10 \end{cases}$ را می توان به صورت $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix}$

نکته: یک دستگاه ممکن است یک یا بی شمار جواب داشته و یا جواب نداشته باشد.

روش حل یک دستگاه معادلات خطی

الف) روش حذفی گوس: در این روش با استفاده از این خاصیت که انجام اعمال سطری مقدماتی روی معادلات دستگاه تأثیری در جواب ندارد، دستگاه مربوط را به یک دستگاه ساده تر تبدیل می کنند یعنی ماتریس ضرایب افزوده $[A|B]$ را با اعمال سطری مقدماتی به ساده ترین صورت ممکن درمی آورند.

ب) روش وارون ماتریس ضرایب

اگر تعداد مجهولات با تعداد معادلات یک دستگاه معادلات خطی برابر باشد و ماتریس ضرایب وارون پذیر باشد آنگاه دستگاه یک جواب منحصربفرد دارد که به صورت زیر است:

$$X=A^{-1}B$$

ج) روش دستور کرامر:

اگر ماتریس ضرایب یک دستگاه وارون پذیر باشد آنگاه:

$$x_i=\frac{\det A_i}{\det A} \qquad i=1,2,\dots,n$$

که در آن A_i ماتریس حاصل از جایگزین کردن عناصر B در ستون iام ماتریس A است.

مثال: دستگاه معادلات خطی $\begin{cases} 2x+3y=8 \\ 3x+4y=11 \end{cases}$ را از سه روش حل کنید.

$$A=\begin{bmatrix}2&3\\3&4\end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix}8\\11\end{bmatrix} \quad X=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$$

۱) روش حذفی گوس

$$[A|B]=\left[\begin{array}{cc|c}2&3&8\\3&4&11\end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{2}R_1\to R_1} \left[\begin{array}{cc|c}1&\frac{3}{2}&4\\3&4&11\end{array}\right] \xrightarrow{-3R_1+R_2\to R_2} \left[\begin{array}{cc|c}1&\frac{3}{2}&4\\0&-\frac{1}{2}&-1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-2R_2\to R_2} \left[\begin{array}{cc|c}1&\frac{3}{2}&4\\0&1&2\end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{3}{2}R_2+R_1\to R_1} \left[\begin{array}{cc|c}1&0&1\\0&1&2\end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} x+0y=1 \Rightarrow x=1 \\ 0x+y=2 \Rightarrow y=2 \end{array}$$

۲) روش ماتریس وارون:

چون $|A|=\begin{vmatrix}2&3\\3&4\end{vmatrix}=-1\neq 0$ بنابراین A وارون پذیر است و

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\operatorname{adj}A=\frac{1}{-1}\begin{bmatrix}4&-3\\-3&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4&3\\3&-2\end{bmatrix}$$

$AX=B$

$$\Rightarrow X=A^{-1}B \Rightarrow X=\begin{bmatrix}-4&3\\3&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}8\\11\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} \Rightarrow x=1 \ , \ y=2$$

۳) دستور کرامر:

$$x=x_1=\frac{\det A_1}{\det A}=\frac{\begin{vmatrix}8&3\\11&4\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2&3\\3&4\end{vmatrix}}=1$$

$$y=x_2=\frac{\det A_2}{\det A}=\frac{\begin{vmatrix}2&8\\3&11\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2&3\\3&4\end{vmatrix}}=2$$

مثال: دستگاه سه معادله سه مجهولی زیر را به وسیله روش حذفی گوس بدست آورید.

$$[A|B]=\left[\begin{array}{ccc|c}1&4&3&1\\2&5&4&4\\-1&3&2&-5\end{array}\right] \xrightarrow{R_2-2R_1\to R_2} \left[\begin{array}{ccc|c}1&4&3&1\\0&-3&-2&2\\-1&3&2&-5\end{array}\right] \xrightarrow{R_3+R_1\to R_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&4&3&1\\0&-3&-2&2\\0&7&5&-4\end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{1}{3}R_2\to R_2} \left[\begin{array}{ccc|c}1&4&3&1\\0&1&\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}\\0&7&5&-4\end{array}\right] \xrightarrow[R_3-7R_2\to R_3]{R_1-4R_2\to R_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{11}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right] \xrightarrow[R_2-2R_3\to R_2]{R_1-R_3\to R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right] \xrightarrow{3R_3\to R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x+0y+0z=3 \longrightarrow x=3 \\ y=-2 \\ z=2 \end{cases}$$

مثال: جواب دستگاه زیر را با استفاده از وارون ماتریس ضرایب محاسبه کنید

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3=9 \\ x_1+2x_2+3x_3=6 \\ 3x_1+x_2+2x_3=8 \end{cases}$$

$$AX=B \longrightarrow X=A^{-1}B \qquad A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}$$

?

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\,adj\,A=$$

$$|A| \longrightarrow \left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right| \Rightarrow |A|=(8+27+1)-(6+6+6)=36-18=18$$

$$adj\,A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=4-3=1$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=-(2-9)=7$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=1-6=-5 \quad , \quad A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=-(6-1)=-5$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=4-3=1 \quad , \quad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=-(2-9)=7$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=(9-2)=7 \quad , \quad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=-1(6-1)=-5$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=4-3=1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 7 & -5 \\ -5 & 1 & 7 \\ 7 & -3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{و ستون}]{\text{جابجایی سطر}} \begin{bmatrix} 1 & -5 & 7 \\ 7 & 1 & -5 \\ -5 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\operatorname{adj}A = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 7 & 1 & -5 \\ -5 & 7 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad X = A^{-1}B = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 7 & 1 & -5 \\ -5 & 7 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 18 \end{bmatrix} = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 35 \\ 29 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = \frac{35}{18} \quad , \quad x_2 = \frac{29}{18} \quad , \quad x_3 = \frac{5}{18}$$

مثال: دستگاه زیر را با دستور کرامر حل کنید.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 3 \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\det A \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 4 & 1 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 & 3 & -1 \end{array}\right] = (\underbrace{-1 + \cancel{4} - 12}_{-9}) - (\underbrace{8 - \cancel{3} - 2}_{3}) = -12 \neq 0$$

پس A وارون پذیر است.

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A} \qquad i = 1,2,3$$

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{-12} = \frac{16}{-12} = -\frac{4}{3}$$

$$x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{-12} = \frac{-30}{-12} = \frac{5}{2}$$

$$x_3 = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix}}{-12} = \frac{-22}{-12} = \frac{11}{6}$$

تعریف: دستگاهی که در آن مقادیر سمت راست همه صفر باشند دستگاه همگن نامیده می‌شود.

$$\begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ 4x - 2y = 0 \end{cases}$$

نکته ۱: جواب $(x_1, \dots, x_n) = (0, \dots, 0)$ یک جواب بدیهی دستگاه همگن است.

نکته ۲: دستگاه n معادله خطی n مجهولی همگن دارای یک جواب غیرصفر (غیربدیهی) است $\Leftrightarrow$ دترمینان ماتریس ضرایب دستگاه صفر باشد.

مثال: دستگاه معادلات همگن زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 - 4x_2 = 0 \end{cases}$$

حل : ابتدا دترمینان ماتریس ضرایب را محاسبه می‌کنیم

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -4 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + 1 \times (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \times (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$$-4 - 3 - 15 = -22 \neq 0$$

با توجه به نکته ۲ نتیجه می‌گیریم که دستگاه همگن داده شده تنها دارای جواب بدیهی است ، یعنی

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0$$

نکته ۳ : یک دستگاه m معادله خطی n مجهولی همگن همواره یک جواب غیربدیهی دارد اگر $m < n$ باشد.

مثال : دستگاه همگن زیر را حل کنید

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

حل : از دستور روش حذفی گوس حل می‌کنیم

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 - 2R_1 \to R_2}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & -5 & 7 & -10 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{1}{5}R_2 \to R_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{5} & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 - 2R_2 \to R_1}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{5} & 2 & 0 \end{array}\right] \qquad \begin{cases} x_1 - \frac{1}{5}x_3 = 0 \\ x_2 - \frac{7}{5}x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

فرض کنید $x_3 = a$ و $x_4 = b$ بنابراین داریم ،

$$x_1 = \frac{1}{5}a \quad , \quad x_2 = \frac{7}{5}a - 2b$$

دو مجهول آزاد داریم بنابراین دستگاه دارای بی‌نهایت جواب است

نکته ۴ : اگر X_1 و X_2 دو جواب دستگاه غیرهمگن $AX = B$ باشند آنگاه $X_2 - X_1$ و $X_1 - X_2$ جواب‌های دستگاه همگن $AX = 0$ هستند

نکته ۵: دستگاه غیرهمگن $AX = B$ دارای یک جواب منحصربفرد است اگر و تنها اگر جواب $AX = 0$ منحصربفرد باشد

مثال: به ازای چه مقداری از a و b، دستگاه زیر دارای جواب است.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = a \\ 3x_1 - 6x_2 = b \end{cases}$$

حل: ابتدا صورت ماتریسی دستگاه را می‌نویسیم

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad \text{یا} \quad AX = B$$

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & a \\ 3 & -6 & b \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 - 3R_1 \to R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & a \\ 0 & 0 & b-3a \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = a \\ b - 3a = 0 \to b = 3a \end{cases}$$

این دستگاه در صورتی جواب دارد که $b = 3a$ باشد.

استقلال و وابستگی خطی

مجموعه k بردار $\{v_1, \dots, v_k\}$ را مستقل خطی گویند هرگاه از معادله $c_1v_1 + \dots + c_kv_k = 0$ نتیجه شود که برای هر i؛ $c_i = 0$ یعنی برداری برحسب بردارهای دیگر نوشته نشود. در غیر این صورت بردارها را وابسته خطی گوییم.

نکته ۱: منظور از 0، بردار صفر هم‌اندازه بردارهای v_1 تا v_k است.

نکته ۲: مجموعه بردارهای $\{v_1, \dots, v_k\}$ مستقل خطی است $\iff \begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_k \end{vmatrix} \neq 0$

مثال: مجموعه $\{(1,0,1), (0,1,1), (1,1,0)\}$ مستقل خطی است نشان دهید.

حل:

$$c_1(1,0,1) + c_2(0,1,1) + c_3(1,1,0) = (0,0,0)$$

باید نشان دهیم تنها جواب این معادله $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ می‌باشد.

$$(c_1 + c_3, c_2 + c_3, c_1 + c_2) = (0,0,0)$$

دترمینان ضرایب دستگاه را بدست می‌آوریم

$$\begin{cases} c_1 + c_3 = 0 \\ c_2 + c_3 = 0 \\ c_1 + c_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 0 + (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

بنابراین دترمینان ضرایب دستگاه مخالف صفر است بنابراین تنها جواب دستگاه جواب بدیهی $c_1=c_2=c_3=0$ می‌باشد

در نتیجه مجموعه سه بردار داده شده مستقل خطی است.

مثال: نشان دهید مجموعه چهار بردار $(1,2,3)$ و $(5,7,8)$ و $(1,0,0)$ و $(10,16,19)$ وابسته خطی است

$$c_1(1,2,3)+c_2(5,7,8)+c_3(1,0,0)+c_4(10,16,19)=(0,0,0)$$

$$\begin{cases} c_1+5c_2+c_3+10c_4=0 \\ 2c_1+7c_2+16c_4=0 \\ 3c_1+8c_2+19c_4=0 \end{cases}$$

برای حل این دستگاه می‌توانیم معادله $0c_1+0c_2+0c_3+0c_4=0$ را نیز به دستگاه اضافه کنیم. بنابراین یک دستگاه چهار معادله و چهار مجهولی داریم بنابراین دترمینان ضرایب دستگاه

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 & 10 \\ 2 & 7 & 0 & 16 \\ 3 & 8 & 0 & 19 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0$$

اگر دترمینان نسبت به سطر چهارم بدست آوریم صفر می‌شود

چون $\det=0$ پس دستگاه دارای جواب غیربدیهی می‌باشد.

در نتیجه چهار بردار داده شده وابسته خطی هستند.

رتبه یک ماتریس

فرض کنید $A_{m\times n}$ موجود باشد، حداکثر تعداد سطرهای مستقل خطی ماتریس A را رتبه A گویند و با $r(A)$ نشان می‌دهند.

مثال: رتبه $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ را بدست آورید.

ابتدا باید ثابت کرد سطرهای ماتریس مستقل خطی هستند یا نه. بنابراین دترمینان را بدست می‌آوریم

$$\det A=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0+0+(-1)^{3+3}\times 1\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=2-3=-1\neq 0$$

چون دترمینان $\neq 0$ شد بنابراین هر سه سطر مستقل خطی پس $r(A)=3$

مثال: رتبه ماتریس $A=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\2&5&1&3\\1&4&1&2\end{bmatrix}$ را بدست آورید.

چون ماتریس A مربع نیست، بنابراین دترمینان های 3×3 را در نظر میگیریم

$$\begin{vmatrix}1&2&3\\2&5&1\\1&4&1\end{vmatrix}=8\neq0$$

$$r(A)=3$$

بزرگترین زیرماتریس مربع A که دترمینانش مخالف صفر باشد را بدست می‌آوریم.

نکته ۱: $r(I_n)=n$, $r(A)=r(A^t)$

نکته ۲: $r(A)=n \iff \det A\neq 0$

نکته ۳: $r(A)<n \iff \det A=0$

نکته ۴: همواره $r(A\cdot B)\leq \min\{r(A), r(B)\}$

نکته ۵: اگر A ماتریس ضرایب دستگاه m معادله خطی n مجهولی باشد و $[A|B]$ ماتریس مرکب A و B باشد آنگاه

۱) اگر $r[A|B]=r(A)$ آنگاه دستگاه حداقل یک جواب دارد

۲) اگر $r[A|B]=r(A)=n$ آنگاه دستگاه جواب منحصربفرد دارد.

۳) اگر $r[A|B]=r(A)<n$ آنگاه دستگاه دارای بی‌نهایت جواب است و مجموعه سطرهای ماتریس A وابسته خطی است.

۴) اگر $r[A|B]\neq r(A)$ آنگاه دستگاه جواب ندارد

نکته ۶: با اعمال سطری مقدماتی هم می‌توان رتبه ماتریس را بدست آورد. بدین صورت که اگر عملیات سطری مقدماتی منجر به صفر شدن یک یا چند سطر از ماتریس شود، تعداد سطرهای ماتریس منهای تعداد سطرهای صفر شده، رتبه ماتریس را تشکیل می‌دهد.

مثال: درمورد حل‌پذیری دستگاه معادلات خطی زیر تحقیق کنید.

$$\begin{cases}-x_1+3x_2-x_3=4\\2x_1-6x_2+2x_3=3\\-x_1+2x_2+3x_3=2\end{cases}$$

حل: دترمینان A ماتریس ضرایب دستگاه بالا را بدست می‌آوریم

$$\det A=\begin{vmatrix}-1&3&-1\\2&-6&2\\-1&2&3\end{vmatrix}=0$$

چون $\det A=0$ بین سطرهای A مستقل خطی نیستند؛ در واقع رتبه A برابر ۲ می‌باشد

$$\begin{vmatrix}2&-6\\-1&2\end{vmatrix}=4-6=-2\neq0$$

ماتریس مرکب $[A|B]$ برابر است با

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & -6 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \end{array}\right]$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ -6 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \qquad r(A|B) = 3 \neq r(A)$$

در نتیجه دستگاه جواب ندارد.

توابع خطی

تابع n متغیره f از فضای برداری R^n به فضای برداری R^m را که به ازای هر عدد حقیقی r و هر دو n تایی $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ ، $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ از R^n در دو شرط زیر صدق کند یک تابع خطی نام دارد.

1) $f(X+Y) = f(X) + f(Y)$

2) $f(rX) = r f(X)$

مثال: آیا تابع $f(x,y) = (2x-y, x+3y, x-y)$ ، $f: R^2 \longrightarrow R^3$ خطی است

let $X = (x_1, y_1) \quad Y = (x_2, y_2)$

1) $f(X+Y) = f(x_1+x_2, y_1+y_2) = (2x_1+2x_2-y_1-y_2, x_1+x_2+3y_1+3y_2, x_1+x_2-y_1-y_2)$

$= (2x_1-y_1+2x_2-y_2, x_1+3y_1+x_2-3y_2, x_1-y_1+x_2-y_2) =$

$(2x_1-y_1, x_1+3y_1, x_1-y_1) + (2x_2-y_2, x_2-3y_2, x_2-y_2) = f(X) + f(Y)$

2) $f(rX) = f(rx, ry) = (2rx-ry, rx+3ry, rx-ry) = r(2x-y, x-3y, x-y) = r f(X)$

نکته: تابع $f: R^n \longrightarrow R^m$ خطی است $\Longleftrightarrow$ هر مولفه f ترکیب خطی از $x_1, \dots, x_n$ باشد یعنی هر $y_j \in R^m$ داشته باشیم

$$y_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i$$

به بیان دیگر ماتریس A ای وجود داشته باشد که $f(X) = AX$ را ماتریس نمایش دهنده تابع خطی f گویند.

مثال: ماتریس نمایش تابع خطی $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ را که برای هر $X\in\mathbb{R}^3$ به صورت زیر تعریف می‌شود، تعیین کنید.

$$f\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}-2x_1+4x_3\\x_1+x_2+x_3\\2x_2-x_3\end{bmatrix}$$

حل: ماتریس نمایشگر تابع خطی f ← $A=\begin{bmatrix}-2&0&4\\1&1&1\\0&2&-1\end{bmatrix}$

مثال: فرض کنید ماتریس $A=\begin{bmatrix}3&2\\0&-1\\2&-5\end{bmatrix}_{3\times2}$ ماتریس نمایشگر تابع خطی $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ باشد، ضابطه تعریف تابع خطی f را تعیین کنید.

$$f(X)=AX \qquad f\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}3&2\\0&-1\\2&-5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3x_1+2x_2\\-x_2\\2x_1-5x_2\end{bmatrix}$$

نکته: ماتریس نمایشگر تابع خطی $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ یک ماتریس $m\times n$ است.

نکته: تابعی را خطی گویند که در ضابطه آن عدد ثابت غیرصفر به صورت مجموع یا تفاضل نباشد، بین متغیرها علامت ضرب یا تقسیم نباشد، توابع مثلثاتی، نمایی، لگاریتمی، رادیکالی و قدرمطلق نباشد و توان متغیرها یک باشد.

خواص زیر در مورد توابع $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ و $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ برقرار است.

1) $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$

2) $(kf)(x)=kf(x)$ که k عدد حقیقی است

تعریف: تابع $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ را که برای هر $X\in\mathbb{R}^n$ به صورت زیر تعریف شود، تابع صفر گویند. $f(X)=0$

تعریف: تابع $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ را که برای هر $X\in\mathbb{R}^n$ به صورت زیر تعریف شود، تابع همانی گویند که ماتریس نمایشگر آن ماتریس واحد I_n است.

$$f(X)=X$$

نکته: معمولاً تابع همانی را با $I(X)$ نشان می‌دهند.

نکته: اگر A ماتریس نمایشگر خطی $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ و B ماتریس نمایشگر خطی $f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^k$ باشد، ماتریس نمایشگر خطی تابع $g\circ f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^k$ به صورت $C=BA$ خواهد بود.

مثال: توابع خطی $f: R^2 \longrightarrow R^3$ و $g: R^2 \longrightarrow R^3$ را به صورت

$$f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3x_1 \\ x_1 - 2x_2 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix} \qquad g\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -2x_1 \\ 3x_1 - x_2 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

در نظر گرفته، توابع $f+g$ و $2f$ را تعیین کنید.

حل:

$$f+g : R^2 \longrightarrow R^3$$

$$f+g\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) + g\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3x_1 \\ x_1 - 2x_2 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2x_1 \\ 3x_1 - x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 4x_1 - 3x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

$$2f : R^2 \longrightarrow R^3$$

$$2f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = 2\begin{bmatrix} 3x_1 \\ x_1 - 2x_2 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x_1 \\ 2x_1 - 4x_2 \\ 2x_1 - 2x_2 \end{bmatrix}$$

حد توابع چند متغیره

فرض کنید f یک تابع دو متغیره باشد، گوئیم تابع $f(x,y)$ در نقطه (a,b) دارای حد L است اگر هنگامی که (x,y) به (a,b) نزدیک می‌شود، $f(x,y)$ به L نزدیک شود و می‌نویسیم

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=L$$

نکته ۱: دقت کنید که هنگام محاسبه حد تابع $f(x,y)$ در نقطه (a,b) این تابع در یک همسایگی به مرکز (a,b) بجز احتمالاً در خود (a,b) باید تعریف شده باشد. همسایگی در توابع دو متغیره به معنی یک گوی باز به مرکز (a,b) است.

نکته ۲:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=L \Rightarrow \forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta>0 \quad \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\delta \Rightarrow |f(x,y)-L|<\varepsilon$$

نکته ۳: حد توابع n متغیره هم مشابه فوق است.

نکته ۴: حد توابع چند متغیره در صورت وجود منحصر به فرد است.

نکته ۵: اگر $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=L$ آنگاه $\lim_{(x,b)\to(a,b)} f(x,y)=L$ و $\lim_{(a,y)\to(a,b)} f(x,y)=L$، ولی عکس آن درست نیست.

نکته: اگر $\lim_{x\to a}\left[\lim_{x\to b} f(x,y)\right] \neq \lim_{x\to b}\left[\lim_{x\to a} f(x,y)\right]$ آنگاه تابع f در نقطه (a,b) حد ندارد.

مثال: حد تابع $f(x,y)=2x^2-y$ را در نقطه $(1,2)$ بیابید.

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(1,2)}(2x^2-y)=2-2=0$$

مثال: حد تابع $f(x,y)=\dfrac{2x^2-3y^2}{x^2+y^2}$ را در نقطه $(0,0)$ در صورت وجود بیابید.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2x^2-3y^2}{x^2+y^2}=\frac{0}{0} \quad \text{مبهم} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2x^2-3y^2}{x^2+y^2}=\lim_{(0,y)\to(0,0)}\frac{2(0)^2-3y^2}{0+y^2}=\lim\frac{-3y^2}{y^2}=-3$$

$$\lim_{(x,y)\to(x,0)}\frac{2x^2-3y^2}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{x^2}=2 \Rightarrow \text{تابع } f \text{ حد ندارد}$$

فصل چهارم توابع چند متغیره

تعریف: تابع f را که دامنه آن زیرمجموعه‌ای از R^n ، و برد آن زیرمجموعه‌ای از اعداد حقیقی باشد یک تابع n متغیره می‌نامیم.

اگر تابع f یک تابع n متغیره باشد، هر عنصر دامنه آن یک n تایی مرتب $(x_1,x_2,\dots,x_n)$ است. مقدار تابع f به ازای این عنصر دامنه را با $f(x_1,\dots,x_n)$ نشان می‌دهیم.

مثال: تابع $f:R^2\longrightarrow R$ ، با ضابطه تعریف $f(x_1,x_2)=2x_1-3x_2+x_1x_2$ یک تابع دو متغیره است.

تعریف: اگر f,g دو تابع n متغیره باشند، آنگاه برای هر x از R^n و هر عدد حقیقی k، اعمال جبری زیر تعریف می‌شوند

$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ $\qquad$ $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$ $\qquad$ $(kf)(x)=kf(x)$

$(fg)(x)=f(x).g(x)$ $\qquad$ $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$

۲ **مثال:** توابع $f:R^2\longrightarrow R$ ، $g:R^3\longrightarrow R$ با ضوابط تعریف

$f(x,y)=3-x^2-y^2$ ، $g(x,y)=5xy-4$

داده شده‌اند توابع $f+g$ ، $f-4g$ ، $\frac{f}{g}$ را تعیین کنید.

1) $f+g: R^2\longrightarrow R$

$$(f+g)(x,y)=f(x,y)+g(x,y)=3-x^2-y^2+5xy-4=5xy-x^2-y^2$$

2) $f-4g: R^2\longrightarrow R$

$$(f-4g)(x,y)=f(x,y)-4g(x,y)=3-x^2-y^2-4(5xy-4)=12-x^2-y^2-15xy$$

3) $\frac{f}{g}: R^2-\{(x,y)/\ xy\neq\frac{4}{5}\}\longrightarrow R$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x,y)=\frac{3-x^2-y^2}{5xy-4}$$

قضایای حد

فرض کنید توابع f و g در نقطه (a,b) حد داشته باشند آنگاه

۱) $$\lim_{(x,y)\to(a,b)} (f+g)(x,y) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) + \lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)$$

۲) $$\lim_{(x,y)\to(a,b)} (kf)(x,y) = k\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$$

۳) $$\lim_{(x,y)\to(a,b)} (fg)(x,y) = \left[\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)\right]\cdot\left[\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)\right]$$

۴) $$\lim_{(x,y)\to(a,b)} (f-g)(x,y) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) - \lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)$$

۵) $$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \left(\frac{f}{g}\right)(x,y) = \frac{\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)}{\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)} \quad , \lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) \neq 0$$

مثال: نشان دهید

$$\lim_{(x,y)\to(1,-2)} \frac{2x^4+3y^3}{x^2-4y^2} = \frac{22}{15}$$

$$\frac{\lim 2x^4 + \lim 3y^3}{\lim x^2 - \lim 4y^2}_{(x,y)\to(1,-2)} = \frac{2+(-24)}{1-16} = \frac{22}{15}$$

قضیه: اگر $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$ و تابع یک متغیره g در L پیوسته باشد، آنگاه

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} (g\circ f)(x,y) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} g(f(x,y)) = g(L)$$

مثال: مقدار $\lim\limits_{(x,y)\to(e,1)} \ln(e^2 - \frac{x}{y})$ را محاسبه کنید.

می‌نویسیم $f(x,y) = e^2 - \frac{x}{y}$, $g(z) = \ln z$

$$\lim_{(x,y)\to(e,1)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(e,1)} (e^2 - \frac{x}{y}) = \lim e^2 - \frac{\lim x}{\lim y}_{(x,y)\to(e,1)} = e^2 - \frac{e}{1} = e^2 - e$$

$$\lim g(z) = \lim_{(x,y)\to(e,1)} g(f(x,y)) = \lim g(e^2 - e) = \ln(e^2 - e)$$

پیوستگی توابع چندمتغیره

تابع دو متغیره f در نقطه (a,b) پیوسته است اگر:

۱) تابع f در نقطه (a,b) تعریف شده باشد

۲) $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ موجود باشد

۳) $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$

۲- مثال: نشان دهید تابع $f(x,y) = \frac{2x^3+3y^2}{x^2-4y^2}$ در نقطه $(1,-2)$ پیوسته است.

۱) $f(1,-2) = \frac{2\times 1 + 3(-2)^2}{(1)^2 - 4(-2)^2} = \frac{32}{15}$

۲) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,-2)} f(x,y) = \frac{32}{15}$

۳) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,-2)} f(x,y) = f(1,-2)$

در نتیجه تابع f پیوسته است.

نکته: اگر توابع f و g در (a,b) پیوسته باشند، $f \pm g$ و $\frac{f}{g}$ نیز در (a,b) پیوسته هستند ($g(a,b) \neq 0$)

قضیه: اگر تابع دو متغیره f در نقطه (a,b) و تابع یک متغیره g در $f(a,b)$ پیوسته باشند، آنگاه تابع مرکب gof در نقطه (a,b) پیوسته است.

مثال: نشان دهید $h(x,y)=\sqrt{1+x^2+y^2}$ در نقطه دلخواه (x,y) پیوسته است.

$f(x,y)=1+x^2+y^2$, $g(z)=\sqrt{z}$ $\qquad h(x,y)=g(f(x,y))$

$D_f=\mathbb{R}$ $\qquad D_g: z\geq 0$

$$D_{gof}(x)=\{x\in D_f \,/\, f(x)\in D_g\}=\{x\in D_f=\mathbb{R} \,/\, 1+x^2+y^2\geq 0\}$$

$$D_{fog}(x)=\{x\in D_g \,/\, g(x)\in D_f\}$$

مشتق‌های جزئی

مشتق جزئی یک تابع چند متغیره نسبت به یک متغیر، عبارت است از مشتق معمولی آن تابع نسبت به آن متغیر با این شرط که سایر متغیرها را ثابت در نظر بگیرند. مثلاً اگر $f(x,y)$ یک تابع دو متغیره باشد مشتق جزئی f نسبت به x و y را با نمادهای $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ یا f_x , f_y نشان می‌دهند.

$$f_x=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h} \quad , \quad f_y=\lim_{h\to 0}\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}$$

مثال: مشتق های جزئی مرتبه اول تابع $f(x,y)=4x^2y^3-5y^3+2x^4$ را بدست آورید.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(4x^2y^3-5y^3+2x^4)=8xy^3+8x^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(4x^2y^3-5y^3+2x^4)=12x^2y^2-15y^2$$

مثال: فرض کنید $f(x,y,z)=x^2\cos z-z\sin y$. ابتدا مشتق های جزئی مرتبه اول f را محاسبه کنید، سپس مقادیر این مشتق ها را در نقطه $(0,\frac{\pi}{2},1)$ بدست آورید.

دیفرانسیل کل تابع

فرض کنید $f(x,y)$ یک تابع دو متغیره باشد. آنگاه دیفرانسیل کل این تابع عبارتست از:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot dy$$

مثال: فرض کنید $f(x,y) = x^2y + y$ دیفرانسیل کل آن را بیابید:

$$df = f_x\cdot dx + f_y\cdot dy = (2xy)dx + (x^2+1)dy$$

مثال: مشتق های جزئی مرتبه دوم تابع $f(x,y) = (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$ را محاسبه کنید

$$f_x \,,\, f_{xx} \,,\, f_{xy} \,,\, f_{yx} \,,\, f_{yy}$$

مثال: فرض کنید $f(x,y) = xy + y\ln(xy)$. نشان دهید که

$$x\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

مثال: فرض کنید $f(x,y,z) = 3x - \frac{y}{x} + \frac{z}{y}$ که در آن $x = 1-2t$ و $y = \frac{1}{t}$ و $z = t^2+1$. دیفرانسیل کل تابع را بدست آورید.

$$df = f_x\,dx + f_y\,dy + f_z\,dz = \left(3 + \frac{y}{x^2}\right)dx + \left(-\frac{1}{x} - \frac{z}{y^2}\right)dy + \frac{1}{y}\,dz$$

$$dx = -2 \quad,\quad dy = \frac{-1}{t^2} \quad,\quad dz = 2t$$

$$df = \left(3 + \frac{\frac{1}{t}}{(1-2t)^2}\right)\cdot(-2) + \left(-\frac{1}{1-2t} - \frac{t^2+1}{(\frac{1}{t})^2}\right)\cdot\frac{-1}{t^2} + \frac{1}{\frac{1}{t}}\cdot(2t)$$

مثال: فرض کنید $f(x,y) = x + \ln(x^2y^2)$. دیفرانسیل کل تابع را وقتی که $dx = 1$ ، $dy = -1$ ، $x = 2$ ، $y = 3$ محاسبه کنید:

نکته: اگر f تابعی دو متغیره از x و y ، f_x و f_y بر روی ناحیه مورد نظر پیوسته باشند و x و y نیز توابعی از متغیر دیگری مانند t باشند آنگاه

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$$

دیفرانسیل کل تابع

فرض کنید $f(x,y)$ یک تابع دو متغیره باشد، آنگاه دیفرانسیل کل این تابع عبارتست از:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot dy$$

مثال: فرض کنید $f(x,y) = x^2y + y$ دیفرانسیل کل آن را بیابید.

$$\partial f = f_x \cdot dx + f_y \cdot dy = (2xy)dx + (x^2+1)dy$$

مثال: مشتق های جزئی مرتبه دوم تابع $f(x,y) = (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}$ را محاسبه کنید.

$$f_x \,,\, f_{xx} \,,\, f_{xy} \,,\, f_{yx} \,,\, f_{yy}$$

مثال: فرض کنید $f(x,y) = xy + y\ln(xy)$. نشان دهید که

$$x\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

مثال: فرض کنید $f(x,y,z) = 3x - \frac{y}{x} + \frac{z}{y}$ که در آن $x = 1-2t$ ، $y = \frac{1}{t}$ ، $z = t^2+1$. دیفرانسیل کل تابع را بدست آورید.

$$df = f_x\,dx + f_y\,dy + f_z\,dz = \left(3 + \frac{y}{x^2}\right)dx + \left(-\frac{1}{x} - \frac{z}{y^2}\right)dy + \frac{1}{y}\,dz$$

$$dx = -2 \quad,\quad dy = \frac{-1}{t^2} \quad,\quad dz = 2t$$

$$df = \left(3 + \frac{\frac{1}{t}}{(1-2t)^2}\right)\cdot(-2) + \left(-\frac{1}{1-2t} - \frac{t^2+1}{(\frac{1}{t})^2}\right)\cdot\frac{-1}{t^2} + \frac{1}{\frac{1}{t}}\cdot(2t)$$

مثال: فرض کنید $f(x,y) = x + \ln(x^2+y^2)$ ، دیفرانسیل کل تابع را وقتی که $dx = 1$ ، $dy = -0.1$ ، $x = 2$ ، $y = 3$ محاسبه کنید:

نکته: اگر f تابعی دو متغیره از x و y ، و f_x و f_y بر روی ناحیه مورد نظر پیوسته باشند، و x و y نیز توابعی از متغیر دیگری مانند t باشند آن گاه

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2\cos z - z\sin y) = 2x\cos z$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^2\cos z - z\sin y) = -z\cos y$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(x^2\cos z - z\sin y) = -x^2\sin z - \sin y$$

$$f_x(1,\tfrac{\pi}{2},0) = 2x\cos z \Big|_{(x,y,z)=(1,\frac{\pi}{2},0)} = 2\times1\times\cos 0 = 2$$

$$f_y(1,\tfrac{\pi}{2},0) = -z\cos y \Big|_{(x,y,z)=(1,\frac{\pi}{2},0)} = -0\cos\frac{\pi}{2} = 0$$

$$f_z(1,\tfrac{\pi}{2},0) = -x^2\sin z - \sin y \Big|_{(x,y,z)=(1,\frac{\pi}{2},0)} = -1\sin 0 - \sin\frac{\pi}{2} = -1$$

نکته: مشتقات مرتبه دوم در صورت وجود به صورت زیر تعریف می‌شوند.

مشتق نسبت به x و سپس نسبت به y : $\quad f_{xy} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

مشتق نسبت به y و سپس نسبت به x : $\quad f_{yx} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$

دوبار نسبت به x و یا دوبار نسبت به y

$$f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}, \quad f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x . \partial x}$$

۲ مثال: فرض کنید $f(x,y) = x^3 + 2x^2y - y^2$ ، f_x ، f_{xx} ، f_{xy} ، f_{yy} ، f_{yx} ، f_{xxx} را بدست آورید.

$$f_x = 3x^2 + 4xy, \quad f_{xx} = 6x, \quad f_{xy} = 4x, \quad f_{yx} = 4x$$

$$f_y = 2x^2 + 2y, \quad f_{xxx} = 6$$

نکته: اگر f_x و f_y موجود و پیوسته باشند آنگاه:

$$f_{xy} = f_{yx}$$

مثال: فرض کنید $f(x,y)=2x^2+y^2$ و $x=t^4-1$ ، $y=3t^2+5$ مطلوبست محاسبه $\frac{df}{dt}$.

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}=4x\cdot(4t^3)+2y\cdot(6t)$$

مثال: فرض کنید $f(x,y,z)=xy+yz+xz$ که در آن $x=e^t$ ، $y=\cos t$ و $z=\sin t$ مشتق f را نسبت به t را بیابید

$$\frac{df}{dt}=f_x\cdot\frac{dx}{dt}+f_y\cdot\frac{dy}{dt}+f_z\cdot\frac{dz}{dt}$$

قاعده زنجیره‌ای برای توابع چندمتغیره

فرض کنید $f(x,y)$ تابعی دو متغیره از x و y و این دو متغیر خود تابعی از دو متغیر u و v باشند آنگاه

$$\frac{\partial f}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}\quad,$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}$$

مثال: فرض کنید $f(x,y,z)=\ln(x^2+y^2+z^2)$ که در آن $x=r+s$ ، $y=r-s$ و $z=rs$ مشتق‌های جزئی مرتبه اول f نسبت به r و s را بدست آورید.

$$\frac{\partial f}{\partial r}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial r}$$

$$=\frac{2x}{x^2+y^2+z^2}(1)+\frac{2y}{x^2+y^2+z^2}\times(1)+\frac{2z}{x^2+y^2+z^2}\times(s)$$

$$\frac{\partial f}{\partial s}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial s}=$$

$$=\frac{2x}{x^2+y^2+z^2}(1)+\frac{2y}{x^2+y^2+z^2}\times(-1)+\frac{2z}{\quad}$$

مشتق گیری ضمنی

اگر در معادله $f(x,y)=0$ متغیر y تابعی از x باشد به آن تابع ضمنی گویند یعنی تابعی که به طور صریح y را برحسب x تعریف نمی‌کند ولی با کمک مشتق توابع دو متغیره می‌توان دستوری برای مشتق گیری توابع ضمنی ارائه داد.

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)} = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

برای تابع ضمنی $F(x,y,z)=0$ که در آن z یک تابع دو متغیره برحسب x و y است خواهیم داشت:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-F_x(x,y,z)}{F_z(x,y,z)} \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y(x,y,z)}{F_z(x,y,z)}$$

مثال: فرض کنید $y\sin z + x^2 + z\cos y + 3xyz = 0$، مشتق‌های جزئی $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$ را حساب کنید.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{2x+3yz}{y\cos z+\cos y+3xy}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{\sin z - z\sin y + 3xy}{y\cos z+\cos y+3xy}$$

ماکسیمم و مینیمم توابع دو متغیره

فرض کنید $f(x,y)$ یک تابع دو متغیره از x و (a,b) یک نقطه از دامنه f باشد.

۱. $f(a,b)$ را ماکسیمم مطلق f گویند اگر برای هر $(x,y)\in D_f$ داشته باشیم $f(a,b)\geq f(x,y)$.

۲. $f(a,b)$ را مینیمم مطلق f گویند اگر برای هر $(x,y)\in D_f$ داشته باشیم $f(a,b)\leq f(x,y)$.

۳. $f(a,b)$ را ماکسیمم نسبی f گویند اگر دایره‌ای به مرکز (a,b) در دامنه f باشد که به ازای هر (x,y) درون این دایره $f(x,y)\leq f(a,b)$.

۴. $f(a,b)$ را مینیمم نسبی f گویند هرگاه دایره‌ای به مرکز (a,b) در دامنه f باشد به طوری که به ازای هر (x,y) درون این دایره $f(x,y)\geq f(a,b)$.

$\Delta = b^2 - 4ac \quad \Rightarrow \quad y = \frac{11}{3} , \quad y = -1$

نقاط بحرانی تابع عبارتند از: $\left(\frac{22}{3}, \frac{11}{3}\right)$, $(-2,-1)$

$f_{xx} = +2$, $f_{xy} = -4$, $f_{yy} = 6y$

$$\Delta(-2,-1) = f_{xx}(-2,-1) \cdot f_{yy}(-2,-1) - \left[f_{xy}(-2,-1)\right]^2 = -28 < 0$$

در این نقطه f دارای نقطه زینی است.

$$\Delta\left(\frac{22}{3}, \frac{11}{3}\right) = f_{xx}\left(\frac{22}{3}, \frac{11}{3}\right) \cdot f_{yy}\left(\frac{22}{3}, \frac{11}{3}\right) - \left[f_{xy}\left(\frac{22}{3}, \frac{11}{3}\right)\right]^2 = 28 > 0$$

در این نقطه f دارای نقطه مینیمم نسبی است. مقدار Min عبارت است با:

$$f\left(\frac{22}{3}, \frac{11}{3}\right) = -\frac{243}{3}$$

مثال: نقاط max , min نسبی و زینی تابع $f(x,y) = y^3 - 4yx^2 - 3y^2 - 3x^2 + 1$ را در صورت وجود بیابید.

ماکسیمم و مینیمم توابع چندمتغیره تحت شرایط داده شده

در مسائل علمی مقادیر متغیرها معمولاً محدود هستند مانند تولیدات و مواد اولیه یک کارخانه که با محدودیت‌هایی روبرو هستند در چنین مواردی می‌بایست max و min را تحت شرایط داده شده بدست آوریم. این کار را می‌توان با دو روش زیر انجام داد.

1. روش جایگزینی (جانشینی): در این روش با توجه به شرط می‌توان متغیری را برحسب دیگر متغیرها بدست آورد و در تابع اصلی قرار داد. به عنوان مثال

$$\begin{cases} f(x,y) = 3x + 2y^2 \\ x + 2y = 5 \Rightarrow x = 5 - 2y \end{cases} , \quad f(x,y) = 3(5-2y) + 2y^2 = 2y^2 - 6y + 15 = h(y)$$

که $h(y)$ یک تابع یک متغیره برحسب y است، می‌توان max و min آن را از روش توابع یک متغیره بدست آورد.

(تعیین نقاط max یا min نسبی و زین اسبی توابع دو متغیره)

فرض کنید f تابعی از دو متغیر x و y باشد و $f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$ ، f_x ، f_y درون دایره‌ای به مرکز (a,b) پیوسته باشند. قرار دهید:

$$\Delta(a,b)=f_{xx}(a,b)\,f_{yy}(a,b)-\left[f_{xy}(a,b)\right]^2$$

آنگاه:

۱) اگر $\Delta(a,b)>0$ و $f_{xx}(a,b)<0$ آنگاه f در (a,b) دارای Max نسبی است.

۲) اگر $\Delta(a,b)>0$ و $f_{xx}(a,b)>0$ آنگاه f در (a,b) دارای Min نسبی است.

۳) اگر $\Delta(a,b)<0$ آنگاه (a,b) نقطه زین اسبی f است.

۴) اگر $\Delta(a,b)=0$ از این مطلب نتیجه‌ای بدست نمی‌آید.

نکته: در بند (۱) و (۲) می‌توان به جای f_{xx} از f_{yy} نیز استفاده کرد.

مثال: نقاط max ، Min و زین اسبی تابع $f(x,y)=2x^2-xy+5$ را بیابید.

$$\begin{cases} f_x=4x-y \\ f_y=-x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x-y=0 \Rightarrow 4x=y \\ -x=0 \Rightarrow x=0 \end{cases} \Rightarrow y=0$$

نقطه $(0,0)$ یک نقطه اکستریمم نسبی است.

$$f_{xx}=4\ ,\quad f_{xy}=-1\ ,\quad f_{yy}=0$$

$$\Delta(0,0)=f_{xx}(0,0)\cdot f_{yy}(0,0)-\left[f_{xy}(0,0)\right]^2=4\times 0-[-1]^2=-1<0$$

آنگاه $(0,0)$ نقطه زین اسبی f است.

۲) مثال: فرض کنید $f(x,y)=x^2+y^3-4xy-11y$ نقاط max ، min نسبی و زین اسبی f را در صورت وجود بیابید.

$$\begin{cases} f_x=2x-4y=0 \longrightarrow x=2y \\ f_y=3y^2-4x-11=0 \overset{x=2y}{\Longrightarrow} 3y^2-4(2y)-11=0 \Rightarrow 3y^2-8y-11=0 \end{cases}$$

نکته: اگر تابع $f(x,y)$ در (a,b) ماکسیمم یا مینیمم نسبی داشته باشد آن‌گاه

$f_x(a,b)=0$, $f_y(a,b)=0$

نقطه بحرانی: نقطه (a,b) را نقطه بحرانی تابع دو متغیره f گوییم اگر $f_x(a,b)=0$ ، $f_y(a,b)=0$

نکته: نقاط min یا max را نقاط اکسترمم تابع نیز می‌گویند

مثال: فرض کنید $f(x,y)=x^2+y^4+1$ ، مقادیر max یا min نسبی f را در صورت وجود بیابید.

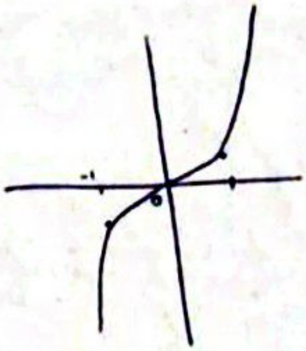
$f_x=2x=0$

$f_y=4y^3=0 \Rightarrow (0,0) \Rightarrow f(0,0)=1$ تنها مقدار max یا min تابع f می‌باشد

$f(x,y)=x^2+y^4+1 \geq f(0,0)=1 \Rightarrow$ f دارای min نسبی است.

مثال: فرض کنید $f(x,y)=2x^2-3y^2$ مقدار ماکسیمم یا مینیمم نسبی تابع f را در صورت وجود بیابید

$$\begin{cases} f_x=4x=0 \\ f_y=-6y=0 \end{cases} \Rightarrow \text{نقطه } (0,0) \longrightarrow \text{نقطه بحرانی}$$



$2x^2-3y^2=0 \Rightarrow \frac{2}{3}x^2=y^2 \Rightarrow y=\sqrt{\frac{2}{3}}\,x$

x	-1	0	1
y	$-\sqrt{\frac{2}{3}}$	0	$\sqrt{\frac{2}{3}}$

max یا min نسبی ندارد

نکته: اگر $f_x(a,b)=0$ و $f_y(a,b)=0$ ، f در (a,b) max یا min نسبی نداشته باشد آن‌گاه f در نقطه (a,b) دارای نقطه زینی (زین اسبی) دارد.