1. $\int dx = x + C$

2. $\int x^m \, dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}$

3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

4. $\int e^x \, dx = e^x + C$

5. $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$

6. $\int \cos x \, dx = \sin x + C$

7. $\int \tan x \, dx = -\ln|\cos x| + C$

8. $\int \cot x \, dx = \ln|\sin x| + C$

9. $\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ a مقدار ثابت

10. $\int \sec x \, dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$ $\int \sec x \, \frac{\sec + \tan}{\sec + \tan} \, dx$

11. $\int \sec^2 x \, dx = \tan x + C$

12. $\int \csc^2 x \, dx = -\cot x + C$

13. $\int \sec x \tan x \, dx = \sec x + C$

14. $\int \csc x \cot x \, dx = -\csc x + C$

15. $\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \text{Arc} \sin u + C = \sin^{-1} u + C$

16. $\int \frac{-du}{\sqrt{1-u^2}} = \text{Arc} \cos u + C = \cos^{-1} u + C$

17. $\int \frac{du}{1+u^2} = \text{Arc} \tan u + C = \tan^{-1} u + C$

18. $\int \frac{-du}{1+u^2} = \text{Arc } \cot u + C = \cot^{-1} u + C$

19. $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-1}} = \sec^{-1}|u| + C = \text{Arc } \sec|u| + C$

20. $\int \frac{du}{|u|\sqrt{u^2-1}} = -\csc^{-1}|u| + C = -\text{Arc } \csc^{-1}|u| + C$

21. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \text{Arc } \sin \frac{u}{a} + C = \sin^{-1}\frac{u}{a} + C$

22. $\int \frac{-du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \text{Arc } \cos \frac{u}{a} + C = \cos^{-1}\frac{u}{a} + C$

23. $\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a} \text{Arc } \tan \frac{u}{a} + C = \frac{1}{a} \tan^{-1}\frac{u}{a} + C$

24. $\int \frac{-du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a} \text{Arc } \cot \frac{u}{a} + C = \frac{1}{a} \cot^{-1}\frac{u}{a} + C$

25. $\int \frac{du}{|u|\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a} \text{Arc } \sec\left(\frac{u}{a}\right) + C = \frac{1}{a} \sec^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$

26. $\int \frac{du}{|u|\sqrt{u^2-a^2}} = -\frac{1}{a} \text{Arc } \csc\left|\frac{u}{a}\right| + C = -\frac{1}{a} \csc^{-1}\left|\frac{u}{a}\right| + C$

* $\sin^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \cos^{-1} x$ * $\cot^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1} x$

* $\cos^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1} x$ * $\sec^{-1} x = \cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$

توابع هذلولوی:

1. $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ 2. $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

3. $\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ 4. $\coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

DATA

5. $\operatorname{sech} x = \dfrac{1}{\cosh x} = \dfrac{2}{e^x + e^{-x}}$

6. $\operatorname{csch} x = \dfrac{1}{\sinh x} = \dfrac{2}{e^x - e^{-x}}$

7. $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

8. $1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$

9. $\coth^2 x - 1 = \operatorname{csch}^2 x$

10. $\sinh x + \cosh x = e^x$

11. $\cosh x - \sinh x = e^{-x}$

12. $\sinh(x \pm y) = \sinh x \cdot \cosh y \pm \cosh x \sinh y$

13. $\cosh(x \pm y) = \cosh x \cdot \cosh y \pm \sinh x \sinh y$

14. $\sinh 2x = 2 \sinh x \cdot \cosh x$

15. $\cosh 2x = \begin{cases} \cosh^2 x + \sinh^2 x \\ 2\cosh^2 x - 1 \\ 1 + 2\sinh^2 x \end{cases}$

16. $(\sinh x + \cosh x)^n = \sinh nx + \cosh nx$

27. $\int \sinh u \, du = \cosh u + c$

28. $\int \cosh u \, du = \sinh u + c$

29. $\int \operatorname{sech}^2 u \, du = \tanh u + c$

30. $\int \operatorname{csch}^2 u \, du = -\coth u + c$

31. $\int \operatorname{sech} u \tanh u \, du = -\operatorname{sech} u + c$

32. $\int \operatorname{csch} u \coth u \, du = -\operatorname{csch} u + c$

33. $\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \sinh^{-1} u + c$

34. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2-1}} = \cosh^{-1} u + c$

35. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2+u^2}} = \sinh^{-1} \frac{u}{a} + c$

36. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \sinh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c = \ln\left(x + \sqrt{x^2+a^2}\right) + c$

37. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \cosh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c = \ln\left(x + \sqrt{x^2-a^2}\right) + c$

38. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{a} \tanh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$ if $|x| < a$

39. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{a} \coth^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$ if $|x| > a$

$$\int \sin u \, du = -\cos u + C$$

$$\int \cos u \, du = \sin u + C$$

$$\int (1+\tan^2 u)\, du = \tan u + C$$

$$\int (1+\cot^2 u)\, du = -\cot u + C$$

$$\int \sin ax \, dx = -\frac{1}{a}\cos ax + C$$

$$\int \cos ax \, dx = \frac{1}{a}\sin ax + C$$

$$\int \tan^2 ax \, dx = \frac{1}{a}\tan ax \quad x + C$$

$$\int \cot^2 ax \, dx = -\frac{1}{a}\cot ax - x + C$$

انتگرالگیری توانهای فرد $\sin ax$ و $\cos ax$:

$\sin ax$ یا $\cos ax$ بتوان یکی را کنار گذاشته اگر بقیه توانهای زوج $\sin ax$ باشد آنرا به $\cos ax$ تبدیل میکنیم چنانچه بقیه توانهای زوج $\cos ax$ باشد آنرا به $\sin ax$ تبدیل میکنیم.

1. $I = \int \sin^5 x \, dx$

$$I = \int \sin^4 x \cdot \sin x \, dx = \int (\sin^2 x)^2 \sin x \, dx = \int (1-\cos^2 x)^2 \sin x \, dx$$

$$= \int (1+\cos^4 x - 2\cos^2 x)\sin x\,dx$$

$$u = \cos x \Rightarrow du = -\sin x\,dx \Rightarrow -du = \sin x\,dx$$

$$\Rightarrow I = \int (1+u^4-2u^2)(-du) = -\int du - \int u^4\,du + 2\int u^2\,du$$

$$= -u - \frac{u^5}{5} + 2\frac{u^3}{3} + C = -\cos x - \frac{\cos^5 x}{5} + 2\frac{\cos^3 x}{3} + C$$

اگر انتگرال توانهای زوج $\sin x$ و $\cos x$:

به کمک فرمولهای $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ و $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ این انتگرالها

قابل حل می‌باشند.

$$I = \int \sin^4 x\,dx = \int (\sin^2 x)^2 dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx =$$

$$\int \frac{1+\cos^2 2x - 2\cos 2x}{4}\,dx = \int \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1+\cos 4x}{2} - 2\cos 2x\right)dx$$

$$= \int \frac{3+\cos 4x - 4\cos 2x}{8}\,dx = \frac{3}{8}\int dx + \frac{1}{8}\int \cos 4x\,dx$$

$$-\frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx = \frac{3}{8}x + \left(\frac{1}{8}\times\frac{1}{4}\sin 4x\right) - \left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\sin 2x\right) + C$$

Subject : Date :

خواص و قواعد انتگرال

1. $\int_a^b f_1(x) + f_2(x)\, dx = \int_a^b f_1(x)\, dx + \int_a^b f_2(x)\, dx$

2. $\int_a^b c\, f(x)\, dx = c \int_a^b f(x)\, dx$

3. $\int_a^b c_1 f_1(x) \pm c_2 f_2(x) \pm \dots \pm c_n f_n(x)\, dx =$

4. $c_1 \int_a^b f_1(x) dx \pm c_2 \int_a^b f_2(x)\, dx \pm \dots \pm c_n \int_a^b f_n(x) dx$

5. $\int g'(x)\, f(g(x))\, dx = \int f(u)\, du$

$*\ g(x) = u \rightarrow g'(x) dx = du$

6. $\int (g(x))^n\, g'(x) dx = \int u^n\, du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$

$*\ g(x) = u \rightarrow g'(x) dx = du$

7. $\int_a^b f(x)\, dx = - \int_b^a f(x)\, dx \qquad a<b$

8. $\int_a^b f(x)\, dx = 0 \qquad a=b$

Subject Date

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx = F(g(x)) + C$$

که در آن F یک تابع اولیه f است.

مثال: جواب انتگرال $\int 2x(1+x^2)^2 dx$ را معین کنید.

$$\int 2x(1+x^2)^2 dx = \int (1+x^2)^2 (2x)\, dx = \int f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx =$$

$g(x) = 1+x^2 \Rightarrow g'(x) = +2x$

$(1+x^2)^2 = f(g(x))$

$$\int u^2 du = \frac{u^3}{3} + C = \frac{(1+x^2)^3}{3}$$

مثال: جواب انتگرال $\int x^2(1+x^3)^2 dx$ را معین کنید.

$$\int x^2 (1+x^3)^2 dx = \int u^2 \cdot \frac{du}{3} = \frac{1}{3}\int u^2 du = \frac{1}{3}\frac{u^3}{3} = \frac{u^3}{9} = \frac{(1+x^3)^3}{9}$$

$1+x^3 = u \Rightarrow 3x^2 dx = du \Rightarrow x^2 dx = \frac{du}{3}$

$d(1+x^3) = du \Rightarrow 3x^2 dx = du$

مثال:

$$\int \sin x (1+\cos x)^2 dx = \int -u^2 du = -\int u^2 du = -\frac{u^3}{3} = -\frac{(1+\cos x)^3}{3}$$

$1+\cos x = u \Rightarrow -\sin x\, dx = du$

مثال:

$$\int \tan x (1+\tan^2 x)\, dx = \int u\, du = \frac{u^2}{2} = \frac{\tan^2 x}{2}$$

$\tan x = u \Rightarrow (1+\tan^2 x) dx = du$

Subject: Data:

روش جزء به جزء: برای محاسبه انتگرال هایی بصورت $\int f(x)g(x)dx$ که محاسبه انتگرال مشکل باشد ولی محاسبه $\int g(x)dx$ یا $\int f(x)dx$ ساده باشد. از روش جزء به جزء استفاده می کنیم. می دانیم: $d(uv)=udv+vdu$

با گرفتن انتگرال از طرفین رابطه بالا داریم

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

مثال: مقدار انتگرال $\int_0^1 x e^{2x}dx$ برابر است با:

$$\int x\,dx = \frac{x^2}{2} \qquad \int e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x}$$

$$u = x \qquad e^{2x}dx = dv$$

$$du = dx \qquad \frac{1}{2}e^{2x} = v$$

$$* \int x e^{2x}dx = \int u\,dv = uv - \int v\,du = \frac{1}{2}xe^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x}dx =$$

$$\frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x}\Big]_0^1$$

مثال: $\int \ln x\,dx = x\ln x - x$

$$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x}$$

$$dx = dv \Rightarrow x = v$$

$$\Rightarrow x\ln x - \int dx = \underbrace{x\ln x - x}$$

$$* \int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \text{Arc}\sin\frac{u}{a} + C$$

مثال $$\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(2)^2-x^2}} = \text{Arc}\sin\frac{x}{2} + C$$

$$* \int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\,\text{Arc}\tan\frac{u}{a} + C$$

مثال $$\int \frac{dx}{9+25x^2} = \int \frac{dx}{\underbrace{(3)^2}_{a}+\underbrace{(5x)^2}_{u}} = \int \frac{du}{5((3)^2+u^2)} = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3}\,\text{Arc}\tan\frac{u}{3}$$

$5x = u \Rightarrow 5dx = du$

$$* \int e^u\,du = e^u + C$$

مثال $$\int e^x\,dx = e^x + C$$

مثال $$\int e^{\overset{u}{2x}}\,dx = \int e^u\,\frac{du}{2} = \frac{1}{2}e^u = \frac{1}{2}e^{2x}$$

$2x = u \Rightarrow 2dx = du$

$$* \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \ln|x^2+1| + C$$

$$* \int \sin u \, du = -\cos u + c$$

$$\int \sin \underbrace{4x}_{u} \, dx = \int \sin u \frac{du}{4} = \frac{1}{4}(-\cos u + c) = \frac{1}{4}(-\cos 4x + c)$$

$$4x = u \Rightarrow 4dx = du$$

$$* \int \sin ax \, dx = -\frac{1}{a} \cos ax + c$$ حالت خاص

$$\int \cos ax \, dx = \frac{1}{a} \sin ax + c$$ حالت خاص

$$* \int \cos u \, du = \cancel{\frac{1}{a} \sin ax + c} \quad \sin u + c$$

$$* \int (1+\tan^2 u) \, du = \tan u + c$$

$$\int (1+\tan^2 ax) \, dx = \frac{1}{a} \tan ax + c$$ حالت خاص

مثال: $\int (1+\tan^2 (\underbrace{4x}_{u})) \, dx = \frac{1}{4} \tan 4x + c$

$$* \int (1+\cot^2 u) \, du = -\cot u + c$$

$$\int (1+\cot^2 ax) \, dx = -\frac{1}{a} \cot ax + c$$

روشهای انتگرال گیری:

روش تغییر متغیر:

ساده‌ترین و مهم‌ترین روش، روش تغییر متغیر است، فرض کنید $g(x)$ تابعی مشتق‌پذیر از x باشد، آنگاه

Subject   Date ....

- $y = k \Rightarrow y' = 0$ $y = 2 \Rightarrow y' = 0$

$y = ax \Rightarrow y' = a$ $y = 3x \Rightarrow y' = 3$

$y = ax^m \Rightarrow y' = max^{m-1}$ $y = 2x^4 \Rightarrow y' = 8x^3$

$y = u + v + w + \dots \Rightarrow y' = u' + v' + w' + \dots$ $y = x^2 + 3x + 1$

$y = u^m \;,\; u = f(x) \Rightarrow y' = m u' u^{m-1}$ قاعده زنجیره‌ای

$y = (x^2+1)^2$

$y = uv \Rightarrow y' = u'v + v'u$ $y = x(x+1)$

$y = uvw \dots \Rightarrow y' = u'(vw) + v'(uw) + w'(vu) + \dots$

$y = x(x+1)(x+2)$

$y = \frac{u}{v} \Rightarrow y' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$ $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{x^2}{x+1}$

$y = \sqrt{u} \Rightarrow y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ $y = \sqrt{x}$

$y = \sqrt[m]{u} \Rightarrow y' = \frac{u'}{m\sqrt[m]{u^{m-1}}}$ $y = \sqrt[5]{x}$

$y = \sqrt[m]{u^n} \Rightarrow y' = \frac{nu'}{m\sqrt[m]{u^{m-n}}}$ $y = \sqrt[3]{x^2}$

$y = k f(x) \Rightarrow y' = k f'(x)$ $y = 2(x^2+1)$

$y = \sin u \Rightarrow y' = u' \sin u$ $y = \sin x$

$y = \sin x^2$

Subject: Data:

$y = \cos u \Rightarrow y' = -u' \sin u$ $y = \cos x$

$y = \cos x^2$

$y = \tan u \Rightarrow y' = u'(1 + \tan^2 u)$ $y = \tan x^3$

$y =$

$y = \cot u \Rightarrow y' = -u'(1 + \cot^2 u)$

$y = e^u \Rightarrow y' = u' e^u$ $y = \ln u \Rightarrow y' = \frac{u'}{u}$

* $\int k\,dx = kx + c$ $\Rightarrow$ ① $\int 2\,dx = 2x + c$

② $\int -\frac{3}{2}\,dt = -\frac{3}{2}t + c$ ③ $\int dz = z + c$

* $\int x^m\,dx = \frac{1}{m+1}x^{m+1} + c$

① $\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3$

② $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \frac{1}{-\frac{1}{2}+1}x^{-\frac{1}{2}+1} + c = 2x^{\frac{1}{2}} + c$

* $\int f(x) \pm g(x)\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

$\int k f(x)\,dx = k \int f(x)\,dx$ $k =$ ثابت

مثال: $\int 3x^2 - 4x + 2\,dx = \int 3x^2\,dx - \int 4x\,dx + \int 2\,dx =$

$3 \times \frac{1}{3}x^3 - 4 \times \frac{1}{2}x^2 + 2x + c = x^3 - 2x^2 + 2x + c$

چنانچه در محاسبه انتگرال $I=\int f(x)dx$ بتوان با معرفی یک متغیر جدید مانند u ،
مسأله را به انتگرالی برحسب تابع u تبدیل کنیم و سپس انتگرال مذکور را محاسبه
نموده اصطلاحاً می‌گویند انتگرالگیری به روش تغییر متغیر صورت گرفته است و با نوشتن
جواب نهایی برحسب x حاصل انتگرال بدست خواهد آمد.

مثال: $xdy + ydx = 0$ (معادله جدایی پذیر هست ما از همگن حل می‌کنیم)

$M(x,y) = y \Rightarrow M(\lambda x, \lambda y) = \lambda y = \lambda M(x,y)$
همگن از درجه ۱ $\Rightarrow$
$N(x,y) = x \Rightarrow N(\lambda x, \lambda y) = \lambda x = \lambda N(x,y)$

با تغییر متغیر $y = xv$ و $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$ معادله را به معادله تفکیک پذیر تبدیل می‌کنیم:

$xdy + ydx = 0 \Rightarrow x\frac{dy}{dx} + y = 0 \xRightarrow{y=xv}$

$x\left(v + x\frac{dv}{dx}\right) + xv = 0 \Rightarrow xv + x^2\frac{dv}{dx} + xv = 0 \Rightarrow$

$2xv + x^2\frac{dv}{dx} = 0 \xRightarrow{\text{معادله جدایی پذیر}} 2xv\,dx + x^2dv = 0 \Rightarrow$

$\frac{2x\,dx}{x^2} + \frac{dv}{v} = 0 \Rightarrow 2\frac{dx}{x} + \frac{dv}{v} = 0 \xRightarrow{\text{انتگرال}} 2\ln x + \ln v = c$

$\Rightarrow \ln x^2 + \ln v = c \Rightarrow \ln v = c - \ln x^2 \Rightarrow v = e^{c-\ln x^2} \xRightarrow{v=\frac{y}{x}}$

$\frac{y}{x} = e^{c-\ln x^2} \Rightarrow \boxed{y = xe^{c-\ln x^2}}$

نکات: 1. $K\ln x = \ln(x)^k$ مثال: $2\ln x = \ln x^2$
مثال: $-\ln x = \ln(x)^{-1} = \ln(\frac{1}{x})$

2. $u = \ln v \Rightarrow v = e^{u}$

مثال: $x = \ln y \Rightarrow y = e^{x}$

مثال: $x^2 + x + 3 = \ln(y + x) \Rightarrow y + x = e^{x^2+x+3} \Rightarrow$

$y = (e^{x^2+x+3}) - x$

3. $e^{v} = u \Rightarrow v = \ln u$

مثال $e^{y} = x \Rightarrow y = \ln x$

مثال $e^{y+\ln x} = x + \ln x^2 \Rightarrow y + \ln x = \ln(x + \ln x^2)$

$\Rightarrow y = \ln(x + \ln x^2) - \ln x$

مثال: $yx\,dx + x^2 dy = 0$

$M(x,y) = xy \Rightarrow M(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)(\lambda y) = \lambda^2 xy = \lambda^2 M(x,y)$

$N(x,y) = x^2 \Rightarrow N(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^2 = \lambda^2 x^2 = \lambda^2 N(x,y)$

$M(x,y)$ و $N(x,y)$ هردو همگن واز درجه 2 می باشند لذا معادله دیفرانسیل همگن است پس با تغییر متغیر $y = vx$ ، آنرا به معادله جدایی پذیر تبدیل می کنیم:

Subject   Date

1) $k\ \ln x = \ln (x)^{k}$

مثال: $2\ln x = \ln x^{2}$

مثال: $-\ln x = \ln(x)^{-1} = \ln(\frac{1}{x})$

2) $u = \ln v \Rightarrow v = e^{u}$

مثال: $x = \ln y \Rightarrow y = e^{x}$

مثال: $x^{2}+1 = \ln y \Rightarrow y = e^{x^{2}+1}$

مثال: $x^{2}+x+3 = \ln(y+x) \Rightarrow y+x = e^{x^{2}+x+3} \Rightarrow$

$y = e^{x^{2}+x+3} - x$

3) $e^{v} = u \Rightarrow v = \ln u$

مثال: $e^{y} = x \Rightarrow y = \ln x$

مثال: $e^{y+\ln x} = x \Rightarrow y + \ln x = \underset{\ln x}{\cancel{e^{x}}} \Rightarrow y = e^{x} - \ln x$

مثال ، / $(xy+x^2)\,dx - x^2\,dy = 0$

$M(x,y) = xy + x^2 \rightarrow M(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)(\lambda y) + (\lambda x)^2 =$

$\lambda^2 xy + \lambda^2 x^2 = \lambda^2 (xy + x^2) = \lambda^2 (M(x,y))$

$N(x,y) = -x^2 \Rightarrow N(\lambda x, \lambda y) = -(\lambda x)^2 = -\lambda^2 x^2 = \lambda^2 N(x,y)$

همگن از درجه 2 می باشد حال با تغییر متغیر $y = xv$ ، $\dfrac{dy}{dx} = v + x\dfrac{dv}{dx}$

معادله را به معادله جداپذیر تبدیل می کنیم

$(xy + x^2)\,dx - x^2\,dy = 0 \Rightarrow (xy + x^2) - x^2 \dfrac{dy}{dx} = 0$

$\xrightarrow{y = xv} (x(xv) + x^2) - x^2\left(v + x\dfrac{dv}{dx}\right) = 0 \Rightarrow$

$\cancel{x^2 v} + x^2 - \cancel{x^2 v} - x^3 \dfrac{dv}{dx} = 0 \Rightarrow x^2 - x^3 \dfrac{dv}{dx} = 0 \xrightarrow{\text{معادله جداپذیر}}$

$x^2\,dx - x^3\,dv = 0 \Rightarrow \dfrac{dx}{x} - dv = 0 \Rightarrow dv = \dfrac{dx}{x} \xrightarrow{\text{انتگرال}}$

$v = \ln|x| + C \xrightarrow{v = \frac{y}{x}} \dfrac{y}{x} = \ln|x| + C \Rightarrow y = x(\ln|x| + C)$

مثال:
$$xy' = y + 2xe^{-y/x}$$

$$x\frac{dy}{dx} = y + 2xe^{-\frac{y}{x}} \Rightarrow x\,dy = (y + 2xe^{-\frac{y}{x}})\,dx \Rightarrow$$

$$x\,dy - (y + 2xe^{-\frac{y}{x}})\,dx = 0$$

$$M(x,y) = -(y + 2xe^{-\frac{y}{x}}) \Rightarrow M(\lambda x, \lambda y) = -(\lambda y + 2\lambda x e^{-\frac{\lambda y}{\lambda x}})$$

$$= -\lambda(y + 2xe^{-\frac{y}{x}}) = \lambda M(x,y)$$

$$N(x,y) = x \Rightarrow N(\lambda x, \lambda y) = \lambda x = \lambda N(x,y)$$

پس $M(x,y)$ و $N(x,y)$ همگن از درجه ۱ می باشند لذا معادله دیفرانسیل نیز همگن

از درجه‌ی ۱ می‌باشد پس با تغییر متغیر $y = xv$ ، معادله دیفرانسیل را به معادله‌ی

جدایی پذیر تبدیل می‌کنیم:

$$xy' = y + 2x e^{-\frac{y}{x}} \Rightarrow x\frac{dy}{dx} - y - 2x e^{-\frac{y}{x}} = 0 \xRightarrow{y = xv}$$

$$x\left(v + x\frac{dv}{dx}\right) - (xv) - 2x e^{-\frac{(xv)}{x}} = 0 \Rightarrow$$

$$xv + x^2\frac{dv}{dx} - xv - 2x e^{-v} = 0 \Rightarrow x^2\frac{dv}{dx} - 2x e^{-v} = 0$$

$$\xRightarrow{\text{معادله جدایی پذیر}} \frac{x^2 dv}{x^2 e^{-v}} - \frac{2x e^{-v} dx}{x^2 e^{-v}} = 0 \Rightarrow \frac{dv}{e^{-v}} - 2\frac{dx}{x} = 0$$

$$\Rightarrow e^{v} dv = +2\frac{dx}{x} \xRightarrow{\text{انتگرال}} e^{v} = 2\ln|x| + c \Rightarrow v = \ln(2\ln|x| + c)$$

$$\Rightarrow \frac{y}{x} = \ln(2\ln|x| + c) \Rightarrow y = x\ln(2\ln|x| + c)$$

مثال: $x\sin\left(\frac{y}{x}\right)\cdot y' = y\sin\left(\frac{y}{x}\right) + x$

$$x\sin\left(\frac{y}{x}\right)\frac{dy}{dx} = y\sin\left(\frac{y}{x}\right) + x \Rightarrow$$

$$x\sin\left(\frac{y}{x}\right)dy = \left(y\sin\left(\frac{y}{x}\right) + x\right)dx \Rightarrow$$

$$x\sin\left(\frac{y}{x}\right)dy - \left(y\sin\left(\frac{y}{x}\right) + x\right)dx = 0 \Rightarrow$$

$$M(x,y) = -y\sin\left(\frac{y}{x}\right) - x \Rightarrow M(\lambda x, \lambda y) = -(\lambda y)\sin\left(\frac{\lambda y}{\lambda x}\right) - \lambda x$$

$$\Rightarrow M(\lambda x, \lambda y) = \lambda\left(-y\sin\left(\frac{y}{x}\right) - x\right) = \lambda M(x,y)$$

$$N(x,y) = x\sin\left(\frac{y}{x}\right) \Rightarrow N(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)\sin\left(\frac{\lambda y}{\lambda x}\right) =$$

$$\lambda\left(x\sin\left(\frac{y}{x}\right)\right) = \lambda N(x,y)$$

پس M و N همگن میباشند لذا معادله دیفرانسیل همگن است و از تغییر متغیر $y = xv$ استفاده میکنیم:

$$x\sin\left(\frac{y}{x}\right)y' = y\sin\left(\frac{y}{x}\right) + x \xrightarrow{y = xv}$$

$$x\sin\left(\frac{xv}{x}\right)\cdot\left(v + x\frac{dv}{dx}\right) = (xv)\sin\left(\frac{xv}{x}\right) + x \Rightarrow$$

$$x\sin v\left(v + x\frac{dv}{dx}\right) = xv\sin v + x \Rightarrow$$

$$\cancel{xv\sin v} + x^2\sin v\frac{dv}{dx} - \cancel{xv\sin v} - x = 0 \Rightarrow$$

$$x^2\sin v\frac{dv}{dx} - x = 0 \xrightarrow{\text{معادله جدایی پذیر}} x^2\sin v\,dv - x\,dx = 0 \Rightarrow$$

$$\sin v\,dv - \frac{dx}{x} = 0 \xrightarrow{\text{انتگرال}} -\cos v - \ln|x| = C \Rightarrow$$

$$\cos v = -C - \ln|x| \Rightarrow v = \cos^{-1}(-C - \ln|x|) \xrightarrow{v = \frac{y}{x}}$$

$$y = x\cos^{-1}(-C - \ln|x|)$$

معادلات دیفرانسیل کامل:

روش حل معادلات دیفرانسیل کامل:

اول بررسی می‌کنیم معادله دیفرانسیل کامل است یا خیر برای اینکار شرط

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \qquad \left(M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \right)$$

را بررسی می‌کنیم اگر این رابطه برقرار بود پس:

1) $\int M(x,y)\,dx + h(y) = f(x,y)$

را محاسبه می‌کنیم

2) از طرفین رابطه بدست آمده از (1) نسبت به y مشتق می‌گیریم.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = h'(y) + \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx$$

3. رابطه‌ی (2) را مساوی $N(x,y)$ قرار می‌دهیم

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \dots + h'(y) = N(x,y)$$

4. با انتگرال‌گیری از این رابطه مقدار $h(y)$ را بدست می‌آوریم و آنرا در رابطه بدست آمده از (1) قرار می‌دهیم و $f(x,y)$ را بدست می‌آوریم.

روش سوم:

1) $\int M(x,y)\,dy + g(x) = f(x,y)$

را محاسبه می‌کنیم.

2) از طرفین رابطه بدست آمده از (1) نسبت به x مشتق می‌گیریم

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cdots + g'(x)$$

3) رابطه‌ی (2) را مساوی $M(x,y)$ قرار می‌دهیم.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cdots + g'(x) = M(x,y)$$

4) با انتگرال‌گیری از این رابطه مقدار $g(x)$ را بدست می‌آوریم و آنرا در رابطه‌ی بدست آمده از (1) قرار می‌دهیم و $f(x,y)$ را بدست می‌آوریم.

مثال: جواب معادله‌ی $(3x^2e^y + 2xy)\,dx + (x^3e^y + x^2)\,dy = 0$ را بدست آورید.

$$M = 3x^2e^y + 2xy \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 3x^2e^y + 2x$$

$$N = x^3e^y + x^2 \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = 3x^2e^y + 2x$$

$$\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

معادله کامل است.

1) $\int N(x,y)\,dy + g(x) = f(x,y)$

$$\int (x^3 e^y + x^2)\,dy + g(x) = f(x,y)$$

$$\int x^3 e^y\,dy + \int x^2\,dy + g(x) = f(x,y)$$

$$x^3 \int e^y\,dy + x^2 \int dy + g(x) = f(x,y)$$

$$x^3 e^y + x^2 y + g(x) = f(x,y)$$

2) از طرفین رابطه بدست آمده نسبت به x مشتق می‌گیریم:

$$3x^2 e^y + 2xy + g'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}$$

3) رابطه بدست آمده از (2) را مساوی $M(x,y)$ قرار می‌دهیم:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 e^y + 2xy + g'(x) = \underbrace{3x^2 e^y + 2xy}_{M(x,y)} \Rightarrow g'(x) = 0$$

$$\xrightarrow{\int} g(x) = C$$

حال $g(x)$ را در رابطه (1) جایگذاری می‌کنیم:

$$f(x,y) = x^3 e^y + x^2 y + C$$

مثال: معادله دیفرانسیل $(2x^3 + 3xy^2)\,dx + (2y^3 + 3x^2 y)\,dy = 0$ را حل کنید.

$$M(x,y) = 2x^3 + 3xy^2 \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 6xy$$

$N(x,y) = 2y^3 + 3x^2y \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = 6xy$

$\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \Rightarrow$ معادله کامل است

1) $\int M(x,y)\,dx + h(y) = f(x,y) \Rightarrow$

$\int (2x^3 + 3xy^2)\,dx + h(y) = 2\int x^3 dx + 3y^2 \int x\,dx + h(y) = f(x,y)$

$\Rightarrow 2\left(\frac{x^4}{4}\right) + 3y^2\left(\frac{x^2}{2}\right) + h(y) = f(x,y) \Rightarrow$

$\boxed{\frac{x^4}{2} + \frac{3}{2}x^2y^2 + h(y) = f(x,y)}$ *

2) از رابطه‌ی بدست آمده نسبت به y مشتق می‌گیریم،

$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2y + h'(y)$

3) رابطه‌ی (2) را مساوی $N(x,y)$ قرار می‌دهیم:

$3x^2y + h'(y) = 2y^3 + 3x^2y \Rightarrow h'(y) = 2y^3$

4) از رابطه‌ی بدست آمده در (3) انتگرال می‌گیریم تا $h(y)$ را بدست آوریم

$\int h'(y)\,dy = \int 2y^3\,dy \Rightarrow h(y) = 2\left(\frac{y^4}{4}\right) \Rightarrow h(y) = \frac{y^4}{2}$

5) مقدار $h(y)$ را در (1) جایگذاری می‌کنیم و f را بدست می‌آوریم

* $f(x,y) = \frac{x^4}{2} + \frac{3}{2}x^2y^2 + \frac{y^4}{2}$

مثال (عامل انتگرالساز): یک عامل انتگرال‌ساز برای معادله‌ی زیر پیدا کنید.

$(xy+y^2)dx-(x^2+xy)dy=0$

$\frac{\partial M}{\partial y}=x+2y \qquad \frac{\partial N}{\partial x}=-2x-y$

$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=g(x) \Rightarrow \mu(x)=e^{\int g(x)dx}$

$\frac{1}{-(x^2+xy)}\left(\overbrace{x+2y}^{x+2y\,+\,2x+y}-(-2x-y)\right)=\frac{3x+3y}{-(x^2+xy)}=\frac{3(x+y)}{-x(x+y)}=-\frac{3}{x}=g(x)$

$\Rightarrow \mu(x)=e^{\int-\frac{3}{x}dx}=e^{-3Lnx}=e^{Ln(x^{-3})}=x^{-3}=\underset{\sim\sim}{\frac{1}{x^3}}=\mu(x)$

$* \int-\frac{3}{x}dx=-3\int\frac{1}{x}dx=-3Lnx$

$* \ e^{Ln\,u}=u$ مثال $e^{2Lnx}=e^{Lnx^2}=x^2$

معادلات خطی:

- معادلات خطی و مرتبه اول به شکل زیر هستند:

$y'+p(x)y=q(x)$ یا $\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)$

- هرگاه $q(x)=0$ باشد معادله همگن و اگر $q(x)\neq 0$ معادله ناهمگن است

- معادلات خطی و مرتبه اول همگن به سادگی به معادلات جدایی پذیر تبدیل شده و حل می‌شوند

$$-y' + p(x)y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -p(x)y \Rightarrow \frac{dy}{y} = -p(x)dx$$

که با انتگرال‌گیری از طرفین معادله‌ی فوق می‌توان به جواب رسید:

$$\ln y = c_1 - \int p(x)dx \Rightarrow y = e^{c_1 - \int p(x)dx} \Rightarrow \boxed{y = c e^{-\int p(x)dx}}$$

جواب معادلات خطی مرتبه اول غیرهمگن بصورت زیر است:

$$y = \frac{1}{\mu(x)}\left(\int q(x)\,\mu(x)\,dx + c\right)$$

که در آن $\mu(x)$ عامل انتگرال‌ساز می‌باشد یعنی:

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$$

مثال: جواب کلی معادله‌ی $y' + y = \sin x$ را بدست آورید.

$$y' + y = \sin x \equiv y' + p(x)y = q(x) \qquad p(x) = 1 \quad , \quad q(x) = \sin x$$

پس معادله‌ی فوق یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول خطی است.

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{\int dx} = e^x$$

$$y = \frac{1}{\mu(x)}\left(\int q(x)\mu(x)dx + c\right) = \frac{1}{e^x}\left(\underbrace{\int e^x \sin x\, dx}_{*} + c\right) =$$

$$e^{-x}\left(\frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + c\right) = \frac{1}{2}(\sin x - \cos x) + ce^{-x}$$

Subject: Data:

$$* \int e^x \sin x \, dx = ?$$ از روش جزء به جزء محاسبه می‌شود

$$\begin{cases} e^x dx = dv \xrightarrow{\int} e^x = v \\ \sin x = u \xrightarrow{d} \cos x \, dx = du \end{cases} \xRightarrow{\text{جزء به جزء}} uv - \int v \, du \Rightarrow$$

$$e^x \sin x - \underbrace{\int e^x \cos x \, dx} = \int e^x \sin x \, dx \quad ①$$

برای بدست آوردن $\int e^x \cos x \, dx$ نیز باید از روش جزء به جزء آن را حل کنیم لذا:

$$\begin{cases} e^x dx = dv \xrightarrow{\int} e^x = v \\ \cos x = u \xrightarrow{d} -\sin x \, dx = du \end{cases} \Rightarrow uv - \int v \, du \Rightarrow$$

$$e^x \cos x - \int e^x (-\sin x) dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x \, dx = \int e^x \cos x \, dx$$

با جایگذاری در رابطه‌ی ① داریم:

$$e^x \sin x - \left(e^x \cos x + \int e^x \sin x \, dx\right) = \int e^x \sin x \, dx \Rightarrow$$

$$e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x \, dx = \int e^x \sin x \, dx \Rightarrow$$

$$e^x (\sin x - \cos x) = 2 \int e^x \sin x \, dx \Rightarrow \int e^x \sin x \, dx = \frac{e^x (\sin x - \cos x)}{2}$$

مثال: جواب عمومی معادله دیفرانسیل $xy' - y = 3x^4$ را بدست آورید.

$$xy' - y = 3x^4 \Rightarrow y' - \frac{1}{x}y = 3x^3 \equiv y' + p(x)y = q(x)$$

معادله خطی مرتبه اول است.

$$\Rightarrow p(x) = -\frac{1}{x} \quad , \quad q(x) = 3x^3$$

① $\mu(x) = e^{\int p(x)\,dx} = e^{\int -\frac{1}{x}dx} = e^{-\ln x} = e^{\ln x^{-1}} = x^{-1} = \frac{1}{x}$

② $y = \frac{1}{\mu(x)}\left(\int q(x)\mu(x)\,dx + c\right) \Rightarrow$

$$y = \frac{1}{(1/x)}\left(\int 3x^3 \cdot \frac{1}{x}\,dx + c\right) = x\left(\int 3x^2\,dx + c\right) =$$

$$x\left(3\left(\frac{x^3}{3}\right) + c\right) = x(x^3 + c) \Rightarrow y = x(x^3 + c)$$

مثال (معادلات برنولی): جواب معادله دیفرانسیل $y' = xy^2 - y$

را بدست آورید.

$$y' = xy^2 - y \Rightarrow y' + y = xy^2 \qquad \text{برنولی با } n = 2$$

مرحله (1) معادله را بر y^2 تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{y}{y^2} = \frac{xy^2}{y^2} \Rightarrow y'y^{-2} + y^{-1} = x \quad (1)$$

مرحله (2) تغییر متغیر

$$* \; u = y^{-1} = \frac{1}{y} \Rightarrow u' = -y'y^{-2} \quad \Leftarrow * \left(u^m \Rightarrow \frac{du^m}{dx} = m u^{m-1} u'\right)$$

Subject: Data:

مرحله (3) ، u و u' را در معادله (1) جایگذاری می‌کنیم :

$$y'y^{-2}+y^{-1}=x \quad , \quad u=\frac{1}{y} \quad , \quad u'=-y'y^{-2}$$

$$-u'+u=x \Rightarrow u'-u=-x \quad \equiv u'+p(x)u=q(x)$$

$$\Rightarrow p(x)=-1 \qquad q(x)=-x$$

معادله تبدیل به یک معادله‌ی خطی و مرتبه‌ی اول شد پس جواب معادله بصورت زیر بدست می‌آید :

$$\mu(x)=e^{\int p(x)dx}=e^{\int(-1)dx}=e^{-\int dx}=e^{-x}$$

$$\overset{u}{y}=\frac{1}{\mu(x)}\left(\int q(x)\,\mu(x)\,dx+c\right)=\frac{1}{e^{-x}}\left(\int -xe^{-x}dx+c\right)=$$

$$e^{x}\left(\underbrace{\int -xe^{-x}dx}_{**}+c\right)=e^{x}\left(xe^{-x}+e^{-x}+c\right)=e^{x}\left(e^{-x}(x+1)+c\right)=$$

$$x+1+ce^{x} \Rightarrow \overset{u}{y}=x+1+ce^{x}$$

$$** \int -xe^{-x}dx=?$$

از روش جزء به جزء استفاده می‌شود :

$$\begin{cases} -e^{-x}dx=dv \Rightarrow e^{-x}=v \\ x=u \Rightarrow dx=du \end{cases} \Rightarrow uv-\int v\,du=$$

$$xe^{-x}-\int e^{-x}dx=xe^{-x}+e^{-x} \Rightarrow \int -xe^{-x}dx=xe^{-x}+e^{-x}$$

MICRO

« معادلات دیفرانسیل »

هر رابطه ای بین تابع و متغیر مستقل و مشتقات تابع نسبت به متغیر مستقل را یک معادله دیفرانسیل می‌نامیم.

$$\frac{dx(t)}{dt} = v(t)$$

تعریف: فرض کنید f تابعی از متغیر x باشد. f نسبت به این متغیر دارای مشتق تا رتبه k باشد

هر رابطه ای به صورت: $F(f, f', f'', \dots, f^{(k)}, x) = 0$ را یک معادله دیفرانسیل از رتبه k می‌گوییم.

مثال ۱:
1) $y'' + 2(y')^3 + \sin x = 4$ رتبه 2

2) $(y')^2 + 4y' = \cos x$ رتبه 1 3) $y' = 4$ رتبه 1

4) $y''' + 2xy'' - y' + e^x = 0$ رتبه 3

تعریف: بالاترین رتبه مشتق موجود در معادله دیفرانسیل را رتبه معادله می‌نامیم.

تعریف: هر تابعی که در معادله دیفرانسیل صدق کند جواب معادله نامیده می‌شود.

مثال ۲: اگر $y' = \sin x$ باشد آنگاه هر یک از توابع $y = -\cos x$ و $y = -\cos x + 1$

$y = x^2$ $y' = 2x$

و $y = -\cos x + 2$ یک جواب معادله دیفرانسیل می‌باشند و بطور کلی $y = -\cos x + c$

جواب معادله دیفرانسیل است.

همانطور که در مثال بالا دیدیم یک معادله ممکن است بیش از یک جواب داشته باشد حتی

بینهایت جواب که همگی تحت یک فرمول که شامل یک ثابت دلخواه است بیان می‌شوند

چنین جوابی را جواب عمومی می‌نامیم. اگر جواب عمومی را تحت شرایط اولیه قرار دهیم و پارامتر

ثابت را تعیین کنیم جواب خصوصی بدست می‌آید. (اگر در جواب عمومی یک معادله، به ثابتها

مقادیر معین نسبت دهیم، جوابهای خصوصی بدست می‌آید).

بعنوان مثال اگر بخواهیم در مثال بالا، جواب را طوری تعیین کنیم که $y(0)=1$ باشد در جواب

عمومی $x=0$ و $y=1$ قرار می‌دهیم $1=-\cos 0+C \Rightarrow C=2$

در جواب عمومی $C=2$ قرار می‌دهیم $y=-\cos x+2$ جواب خصوصی معادله است.

جواب غیرعادی: جوابی از یک معادله را که نتوان از جواب عمومی بدست آورد جواب غیرعادی

می‌نامند (معادلات خطی جواب غیرعادی ندارند). (معمولاً مماس آن بر همه منحنی‌های جواب عمومی‌اند)

مثال ۸: معادله $y'=2\sqrt{y}$ دارای جواب عمومی $y=(x+C)^2$ است. توجه کنید

$y'=y$

که $y(x)=0$ نیز جواب معادله است. اما این جواب به ازای هیچ مقدار C از جواب

عمومی بدست نمی‌آید ولذا $y(x)=0$ جواب غیرعادی معادله می‌باشد.

مثال ۹. $y=e^{2x}$ جواب معادله $y''-5y'+6y=0$ است همینطور e^{3x} نیز جواب معادله

است. بطوریکه هر یک از توابع $y_1=c_1e^{2x}$ و $y_2=c_2e^{3x}$ که c_1, c_2 ثابتهای دلخواه هستند

جواب معادله می باشند. علاوه براین تابع $y=c_1e^{2x}+c_2e^{3x}$ برای هر c_1 و c_2 جواب است.

تذکر: هر معادله دیفرانسیل لزوماً دارای جواب نیست. بعنوان مثال هیچ تابع حقیقی از x در

معادله $|y'|+1=0$ صدق نمی کند.

معادلات خطی و غیرخطی:

معادله دیفرانسیل معمولی را خطی گوییم هرگاه بتوان آنرا بصورت زیر نوشت

$$a_n(x)y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_1(x)y'+a_0(x)y=g(x) \qquad (1)$$

که در آن ضرایب $a_i(x)$ $(i=0,1,\dots,n)$ و $g(x)$ توابعی از x هستند و می توانند

ثابت باشند. (F ترکیب خطی از مشتقات تابع باشد)

هر معادله دیفرانسیل که بصورت (1) نباشد غیرخطی نامیده می شود.

مثال ۳: هر یک از معادلات زیر خطی هستند:

1) $xy''+y'=x^2$ 2) $y'''-y=x$

3) $y''+xy'+e^xy=\sin x$ 4) $x^2y'''+\frac{x}{1+x}y''+y=0$

و هر یک از معادلات زیر غیرخطی هستند،

1) $y'+y^2=1$ 2) $y'=x\cos y$ 3) $(y'')^2+(y')^3-y=x$

4) $y''^2+2yy'^3+\sin x=0$

تعریف: درجه معادله دیفرانسیل، در صورتیکه بتوان آن معادله را به صورت یک چند جمله‌ای بر حسب تابع مجهول و مشتقات آن نوشت، عبارت است از توان بزرگترین رتبه مشتق موجود در معادله.

مثال ۶ـ مرتبه و درجه معادلات دیفرانسیل زیر را تعیین کنید:

1. $(y')^2 + y^2 = 1$ $\Rightarrow$ مرتبه اول و درجه 2
2. $(y'')^2 + (y')^3 - y = x$ $\Rightarrow$ رتبه 2 و درجه 2
3. $e^y y'' + 2(y')^2 = 1$ $\Rightarrow$ مرتبه 2 است ولی براساس آن درجه تعریف نمی‌شود

تشکیل معادلات دیفرانسیل:

چنانچه رابطه‌ای بصورت زیر باشد:

$$F(x, y, C) = 0 \qquad (1)$$

که در آن x و y متغیر و C مقدار ثابت دلخواه می‌باشد. می‌خواهیم معادله دیفرانسیلی بدست آوریم که رابطه F جواب آن باشد، بنابر تعریف، رابطه F را جواب عمومی معادله می‌نامیم.

معادله دیفرانسیل را با انجام مراحل زیر بدست می‌آوریم، نخست از رابطه (1) نسبت به x مشتق ضمنی می‌گیریم تا رابطه‌ای بصورت زیر بدست آید:

$$g\left(x, y, \frac{dy}{dx}, C\right) = 0 \qquad (2)$$

پس بین روابط (1) و (2) پارامتر C را حذف می‌کنیم تا رابطه‌ی

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \qquad (3)$$

که همان معادله دیفرانسیل مطلوب است بدست آید.

مثال ۷: معادله دیفرانسیل منحنیهای $y = ce^{-x}$ را پیدا کنید.

حل: از معادلهی منحنیها نسبت به x مشتق میگیریم

① $y' = -ce^{-x}$

پارامتر C را حذف میکنیم:

② $y = ce^{-x} \Rightarrow c = \dfrac{y}{e^{-x}}$

$y' = -ce^{-x} \Rightarrow y' = -\dfrac{y}{e^{-x}} \cdot e^{-x} \Rightarrow y' = -y$

مثال 8. معادله دیفرانسیل کلیه دوایر را در صفحه که مرکز آنها روی محور xها قرار دارد بدست آورید:

معادلهی این دوایر اینچنین است: $(x - c_1)^2 + y^2 = c_2^2$

که c_1 و c_2 پارامتر هستند چون خانواده داده شده به دو پارامتر بستگی دارد لذا از معادله دوبار متوالیاً نسبت به x مشتق میگیریم

① $2(x - c_1) + 2yy' = 0$

② $2 + 2(yy'' + y'^2) = 0 \Rightarrow 1 + yy'' + y'^2 = 0$ معادله دیفرانسیل

مثال ۹. معادله دیفرانسیل منحنیهای زیر را پیدا کنید:

1) $y = c_1 \sin x + c_2 \cos x$

2) $y' = c_1 \cos x - c_2 \sin x$

3) $y'' = -c_1 \sin x - c_2 \cos x$

$\overset{①}{\Rightarrow} c_1 = \dfrac{y - c_2 \cos x}{\sin x}$

2) $\Rightarrow y' = \dfrac{y - c_2 \cos x}{\sin x} \cos x - c_2 \sin x \Rightarrow y' \sin x = y \cos x - c_2(\cos^2 x + \sin^2)$

$\Rightarrow y\cos x - c_2 = y'\sin x \Rightarrow c_2 = y\cos x - y'\sin x$

$\Rightarrow c_1 = \frac{1}{\sin x}\left(y - (y\cos x - y'\sin x)\cos x\right) =$

$\frac{1}{\sin x}\left(y - y\cos^2 x + y'\sin x\cos x\right)$

از رابطه 3 $\Rightarrow y'' = -\frac{1}{\sin x}\left(y - y\cos^2 x + y'\sin x\cos x\right)\sin x -$

$(y\cos x - y'\sin x)\cos x \Rightarrow y'' = -y + y\cos^2 - y'\sin x\cos x - y\cos^2 x$

$+ y'\sin x\cos x \Rightarrow y'' = -y \Rightarrow y'' + y = 0$

معادلات با مشتقات جزئی:
اگر در یک معادله دیفرانسیل تابع مجهول، تابعی فقط از یک متغیر مستقل باشد آن معادله را یک معادله دیفرانسیل معمولی می نامیم. و اگر تابع مجهول تابعی از چند متغیر مستقل باشد آن معادله را یک معادله با مشتقات جزئی می نامیم. پس اگر u تابعی از n متغیر مستقل $x_1, x_2, \ldots, x_n$ باشد، یک معادله با مشتقات جزئی رابطه ای است بین متغیرهای $x_1, \ldots, x_n$ و u و مشتقات جزئی u نسبت به متغیرهای مستقل.

مثال ۱۵. فرض کنید u تابعی از دو متغیر مستقل x و y باشد. معادله زیر یک معادله با مشتقات جزئی مرتبه اول است:

$$y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} = u$$

تمرین : تحقیق کنید آیا تابع داده شده جواب معادله دیفرانسیل نظیر هست یا خیر؟

1) $y'' - y = 0$ $\qquad$ $y = e^{x} + 3e^{-x}$

2) $y'' + y' = 2$ $\qquad$ $y_1 = 2x \qquad y_2 = 2x - 3$

3) $y' = y^{1/2}$ $\qquad$ $y_1(x) \equiv 0 \quad , \quad y_2(x) = \frac{x^2}{4} \quad x \geqslant 0$

4) $y'' - 4y = 0$ $\qquad$ $y = \sin 2x$

5) $yy' = e^{2x}$ $\qquad$ $y^2 = e^{2x} + c$

6) $y^2 + x^2 = 2xyy'$ $\qquad$ $y^2 = x^2 - 2x$

2 ـ رتبه و درجه معادلات دیفرانسیل زیر را تعیین کنید

1) $(y'')^2 + 3(y')^3 = 0$

2) $(y')^{1/2} = (1 + y'')^{1/3}$

3) $y' + \ln y - 1 = 0$

3 ـ معین کنید کدام یک از معادلات زیر خطی اند و کدام یک غیر خطی؟

1) $y'' + xy' + x^2 y = e^{x}$

2) $y'' + yy' + x = 0$

3) $y'' + \cos y = 0$

4) $y' + (\cos x) y = e^{x}$

۴. معادله دیفرانسیل همه دوایری را که مرکز آنها روی محور y ها قرار دارد بدست آورید

$x^2+(y-c_1)^2=c_2^2$

۵. نشان دهید خانواده توابع داده شده جواب معادله دیفرانسیل نظیر است

1) $y''-6y'+9y=0$ $\qquad$ $y=c_1e^{3x}+c_2xe^{3x}$

2) $(\cos 2x)\,y'+(2\sin 2x)\,y=2$ $\qquad$ $y=c_1\cos 2x+\sin 2x$

3) $2yx\,dy=(y^2-x)\,dx$ $\qquad$ $y^2=c_1x-x\ln x$

طبقه بندی معادلات دیفرانسیل مرتبه اول :

معادلات دیفرانسیل مرتبه اولی که براس آنها راه حل می‌توان ارائه نمود به چهار دسته‌ی کلی بصورت زیر طبقه بندی می‌شوند :

۱ - معادلات جداپذیر
۲ - معادلات همگن
۳ - معادلات کامل
۴ - معادلات خطی

بسیاری از معادلات مرتبه اول را می‌توان با یک تعویض متغیر مناسب ، به یکی از چهار نوع معادله تبدیل نمود.

معادلات جداپذیر :

تعریف : معادله دیفرانسیل مرتبه اول بصورت :

$M(x) + N(y)\, y' = 0$ (1)

یا شکل دیفرانسیلی معادل آن :

$M(x)\, dx + N(y)\, dy = 0$ (2)

را جداپذیر می‌نامیم . دلیل این نامگذاری آن است که در معادلات فوق متغیرهای x و y در جملات جداگانه ظاهر می‌شود. $M(x)$ و $N(y)$ توابع پیوسته‌ای از x و y هستند

با انتگرالگیری از معادله (2) جواب عمومی بدست می‌آید. $x\,dx + y\,dy = 0$ مثال

مثال ۱ : جواب عمومی معادله مرتبه اول $y' = e^{x+y}$ را بدست آورید و یک جواب خصوصی‌ای را که در شرط $y(0) = 0$ صدق می‌کند تعیین نمایید .

$y' = e^{x+y} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^x \cdot e^y \Rightarrow e^{-y} dy = e^x dx \Rightarrow$

$e^x dx - e^{-y} dy = 0 \xrightarrow{\int} \int e^x dx - \int e^{-y} dy = e^x + e^{-y} = c$

$y(0) = 0 \Rightarrow x = 0 \;,\; y = 0 \Rightarrow 1 + 1 = c \Rightarrow c = 2$

$e^x + e^{-y} = 2 \Rightarrow e^{-y} = 2 - e^x \Rightarrow -y = \ln(2 - e^x) \Rightarrow \underline{y = -\ln(2 - e^x)}$

مثال 2 ـ مسأله مقدار اولیه زیر را حل کنید:

$y' = 1 + x^2 + y^2 + x^2 y^2 \quad , \quad y(0) = 1$

حل:

$\frac{dy}{dx} = 1 + x^2 + y^2 + x^2 y^2 \Rightarrow dy = (1 + x^2) dx + y^2 (1 + x^2) dx \Rightarrow$

$\frac{dy}{1 + y^2} = (1 + x^2) dx \xrightarrow{\int} \operatorname{ArcTan}(y) = x + \frac{x^3}{3} + c \Rightarrow$

جواب عمومی

$\operatorname{Tan}^{-1}(y) - x - \frac{x^3}{3} = c \quad , \quad y(0) = 1 \Rightarrow$

$\operatorname{Tan}^{-1}(1) - 0 - 0 = c \Rightarrow c = \frac{\pi}{4}$

$y = \operatorname{Tan}\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{\pi}{4}\right)$ جواب معادله

مثال 3 ـ جواب معادله زیر را پیدا کنید:

$2x(y+1)\, dx + (x^2 - 1) dy = 0$

با تقسیم طرفین بر $(x^2 - 1)(y+1)$ متغیرها جدا می‌شوند و داریم:

$\Rightarrow \frac{2x}{x^2 - 1} dx + \frac{dy}{y+1} = 0 \xrightarrow{\int} \int \frac{2x}{x^2 - 1} dx + \int \frac{dy}{y+1} = c \Rightarrow$

$-\ln|x^2+1| + \ln|y+1| = c \Rightarrow \ln|(x^2-1)(y+1)| = c \Rightarrow$

$|(x^2-1)(y+1)| = e^c \Rightarrow (x^2+1)(y+1) = \pm e^c = c_1 \Rightarrow$

$y+1 = \dfrac{c_1}{x^2-1} \Rightarrow y = \dfrac{c_1}{x^2+1} - 1 \qquad ; c_1 \neq 0$

پس معادله بدست آمده بازای هر $x \neq \pm 1$ و هر $c_1 \neq 0$ جواب می‌باشد.

تمرین : جواب عمومی معادله دیفرانسیل $(y+1)\,dx - \tan x\,dy = 0$ را بدست آورید.

2. کدامیک از جوابهای زیر جواب معادله دیفرانسیل $2xy' - y = 0$ است.

1. $y = e^{k\sqrt{x}}$ 2. $y = kx^2$ 3. $y = \dfrac{k}{\sqrt{x}}$ 4. $y = k\sqrt{x}$

3. جواب معادله دیفرانسیل $(1+x^3)\,dy - (x^2 y)\,dx = 0$ با شرط $y(1) = 1$ را بدست آورید.

4. جواب عمومی معادله دیفرانسیل‌های زیر را بدست آورید.

1. $x\dfrac{dy}{dx} + y^2 = 4$ 2. $x\,dy - (1+y^2)\,dx = 0$

معادلات همگن:

تابع $f(x,y)$ را تابعی همگن از درجه α می‌گوییم هرگاه داشته باشیم:

$$\forall \lambda>0 \Rightarrow f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^{\alpha} f(x,y)$$

مثال 1. تابع $f(x,y)=x^2+xy$ همگن از درجه 2 است زیرا:

$$f(\lambda x,\lambda y)=(\lambda x)^2+\lambda^2 xy=\lambda^2(x^2+xy)=\lambda^2 f(x,y)$$

مثال 2. تابع $f(x,y)=\sin\left(\frac{y}{x}\right)$ همگن و از درجه صفر است زیرا:

$$f(\lambda x,\lambda y)=\sin\left(\frac{\lambda y}{\lambda x}\right)=\sin\left(\frac{y}{x}\right)=f(x,y)\cdot\lambda^{0}$$

مثال 3. تابع $f(x,y)=\frac{1}{x+y}$ همگن و از درجه -1 است

تعریف 2: هر معادله دیفرانسیل به فرم $~~M(x)dx+N(y)dy=0~~$ / $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ را که در آن $~~N(y), M(x)~~$ $N(x,y)$ $M(x,y)$ هر دو همگن و از درجه α باشند را یک معادله دیفرانسیل همگن می‌نامیم.

حل این معادلات: برای حل این نوع معادلات، از تغییر متغیر زیر استفاده می‌شود:

$$y=vx \xrightarrow{\text{دیفرانسیل}} \frac{dy}{dx}=x\frac{dv}{dx}+v \Rightarrow dy=v\,dx+x\,dv$$

با این تغییر متغیر، معادله همگن، تبدیل به نوع تفکیک پذیر می‌شود.

مثال 4. مسأله مقدار اولیه زیر را حل کنید:

$$-(x^2+y^2)\,dx+2xy\,dy=0 \quad : \quad y(1)=-1$$

معادله همگن است آن را بصورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+y^2}{2xy}=-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)\xrightarrow[y=xv]{}$$

$$x\frac{dv}{dx}+v=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{v}+v\right)\Longrightarrow\frac{x}{dx}=-\frac{1}{2dv}\left(\frac{3v^2+1}{v}\right)\Longrightarrow$$

$$\frac{dx}{x}+\frac{2v}{3v^2+1}dv=0\xrightarrow{\int}\ln|x|+\frac{1}{3}\ln|3v^2+1|=c$$

$$\xrightarrow{c'=3c}3\ln|x|+\ln|3v^2+1|=c'\Rightarrow\ln|x^3(1+3v^2)|=c'$$

$$\xrightarrow{c'=\ln c_1}\ln|x^3(1+3v^2)|=\ln c_1\xrightarrow[\text{جواب عمومی}]{y=xv}x^3\left(1+\frac{3y^2}{x^2}\right)=c_1\Rightarrow$$

$$x^3+3xy^2=c_1 \quad , \quad y(1)=-1\Rightarrow c_1=4\Rightarrow$$

$$x^3+3xy^2=4\Rightarrow y=\pm\sqrt{\frac{4-x^3}{3x}}\xrightarrow[\text{صدق کند } y(1)=-1]{\text{در شرط مسأله}}y=-\sqrt{\frac{4-x^3}{3x}}$$

مثال 5 - جواب مسأله مقدار اولیه زیر را تعیین کنید:

$$x\sin\left(\frac{y}{x}\right)y'=y\sin\left(\frac{y}{x}\right)+x \quad , \quad y(1)=0$$

$$y'=\frac{y\sin\left(\frac{y}{x}\right)+x}{x\sin\left(\frac{y}{x}\right)}=$$

معادله همگن است می‌نویسیم:

$$\frac{\frac{y}{x}\sin\left(\frac{y}{x}\right)+1}{\sin\left(\frac{y}{x}\right)}\xrightarrow{y=xv}x\frac{dv}{dx}+v=\frac{v\sin(v)+1}{\sin(v)}\Rightarrow$$

$$x\frac{dv}{dx}=\frac{v\sin(v)+1-v\sin(v)}{\sin(v)}\Rightarrow\frac{dx}{x}=\sin(v)\,dv\xrightarrow{\int}$$

$\ln|x| = -\cos v + C \xRightarrow{y=xv} \ln|x| = -\cos(\frac{y}{x}) + C$ جواب عمومی

$y(1)=0 \Rightarrow x=1\,,\ y=0 \Rightarrow C=1 \Rightarrow \ln|x| = -\cos(\frac{y}{x}) + 1$
جواب خصوصی

$\Rightarrow \cos(\frac{y}{x}) = 1 - \ln|x| \Rightarrow y = x\cos^{-1}(1-\ln|x|)$

۲-۴ معادلات دیفرانسیل کامل. / حذف شدم — صرفاً بخوانید

تعریف: معادله رتبه اول: (1) $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$

را کامل گوییم هرگاه یک تابع دو متغیری $f(x,y)$ وجود داشته باشد بطوریکه:

(2) $df = M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy$

بنابراین اگر (1) کامل باشد آنگاه با توجه به (2) داریم: $df = 0$

پس تابع $f(x,y)$ ثابت می باشد و در نتیجه جواب عمومی (1) بصورت زیر است:

(3) $f(x,y) = C$

مثال: معادله دیفرانسیل $3x^2dx + 2y\,dy = 0$ (4) $(3x^2dx + 2y\,dy = 0)$

کامل است، زیرا اگر تعریف کنیم $f(x,y) = x^3 + y^2$ آنگاه داریم:

$df = 3x^2dx + 2y\,dy$

ولذا جواب عمومی (4) (به صورت ضمنی) چنین است: $\boxed{x^3 + y^2 = C}$

اکنون دو سؤال مطرح می‌شود:

۱ـ آیا قاعده‌ای وجود دارد که به کمک آن بتوان بررسی نمود معادله (۱) کامل است یا نه؟

۲ـ اگر معادله (۱) کامل است چگونه آن را حل کنیم؟

تعریف: معادله دیفرانسیل به فرم $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ را کامل گوییم. اگر تابعی مانند $f(x,y)$ وجود داشته باشد بطوریکه:

$$(*)\ \frac{\partial f}{\partial x}=M(x,y)\quad,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=N(x,y)$$

قضیه: شرط لازم وکافی برای کامل بودن معادله دیفرانسیل بالا، آنست که:

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

برای حل معادله باید تابع $f(x,y)$ را چنان تعیین نمود که در شرایط $(*)$ صدق کند، سپس

$f(x,y)=c$ جواب عمومی، می‌باشد.

مثال ۲: معادله دیفرانسیل $(2xy+3)dx+(x^2+8y)dy=0$ را حل کنید.

$$f(x,y)=\int M(x,y)\,dx+h(y)=\int(2xy+3)\,dx+h(y)=$$

$$x^2y+3x+h(y)$$

از طرفین رابطه بالا، نسبت به y مشتق می‌گیریم و آنرا برابر $N(x,y)$ قرار می‌دهیم.

$$\frac{\partial f}{\partial y}=x^2+\frac{dh(y)}{dy}=x^2+8y\ \overset{\int}{\Longrightarrow}\ h(y)=4y^2$$

مثال 3. نشان دهید معادله زیر کامل است و جواب عمومی آن را تعیین کنید.

$$e^{y}\,dx+(xe^{y}+2y)\,dy=0$$

$$M(x,y)=e^{y} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}=e^{y}$$

$$N(x,y)=xe^{y}+2y \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x}=e^{y}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$ کامل

$$* \; f(x,y)=\int e^{y}\,dx+h(y)=e^{y}x+h(y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=N(x,y) \Rightarrow xe^{y}+\frac{\partial h(y)}{\partial y}=xe^{y}+2y \Rightarrow \frac{\partial h(y)}{\partial y}=2y$$

$$\xRightarrow{\int} h(y)=y^{2}$$

$$* \; f(x,y)=xe^{y}+h(y)=\underline{xe^{y}+y^{2}=c}$$

مثال 4. معادله زیر را حل کنید: $(3x^{2}+4xy^{2})\,dx+(2y-3y^{2}+4x^{2}y)\,dy=0$

$$M(x,y)=3x^{2}+4xy^{2} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}=8x$$

$$N(x,y)=2y-3y^{2}+4x^{2}y \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x}=8x$$

$$\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$ کامل

$f(x,y)=\int M(x,y)\,dx+h(y)$ یا $f(x,y)=\int N(x,y)\,dy+h(x)$

$$f(x,y)=\int 3x^{2}+4xy^{2}\,dx+h(y)=x^{3}+2x^{2}y^{2}+h(y)$$

$\frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y) \Rightarrow 4x^2y + \frac{\partial h(y)}{\partial y} = 2y - 3y^2 + 4x^2y \Rightarrow$

$\frac{\partial h(y)}{\partial y} = 2y - 3y^2 \Rightarrow h(y) = y^2 - y^3$

$f(x,y) = x^3 + 2x^2y^2 + y^2 - y^3 = C$

5.2 ـ عامل انتگرال ساز

اگر معادله دیفرانسیل: $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \quad (1)$

کامل نباشد یعنی $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ ، گاهی می‌توان یک تابع غیر صفر μ که بستگی دارد به

x یا y یا هر دو متغیر x و y ، یافت بطوریکه معادله:

$\mu M\,dx + \mu N\,dy = 0 \quad (2)$

کامل باشد یعنی $(\mu M)_y = (\mu N)_x$. در اینصورت تابع μ یک عامل انتگرال ساز

معادله (1) نامیده می‌شود (فاکتور انتگرال‌گیر نیز می‌نامند).

مثال ۱: معادله $2y\,dx + x\,dy = 0$ کامل نیست، ولی با ضرب معادله در $\mu(x) = x$

معادله کامل می‌شود یعنی $2xy\,dx + x^2\,dy = 0$ کامل است

$f(x,y) = \int 2xy\,dx + h(y) = x^2y + h(y)$

$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + \frac{\partial h(y)}{\partial y} = x^2 \Rightarrow \frac{\partial h(y)}{\partial y} = 0 \Rightarrow h(y) = C_1$

$\Rightarrow f = x^2y = C$

تعیین عامل انتگرال ساز :

اگر (2) کامل باشد داریم:

$$(\mu M)_y = (\mu N)_x$$

یا

$$\mu M_y + M\mu_y = \mu N_x + N\mu_x$$

پس تابع $\mu(x,y)$ لزوماً در معادله با مشتقات جزئی زیر صدق می کند:

$$N\mu_x - M\mu_y = \mu(M_y - N_x)$$

از حل این معادله عامل انتگرال ساز بدست می آید. حل این معادله مشکل است از اینرو معادله را در دو حالت خاص بررسی می کنیم :

الف ـ $\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = g(x) \Rightarrow \mu(x) = e^{\int g(x)dx}$

ب ـ $\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = -g(y) \Rightarrow \mu(y) = e^{\int g(y)dy}$

مثال : یک عامل انتگرال ساز برای معادله :

$$(4xy + 3y^2 - x)dx + x(x+2y)dy = 0$$

بدست آورید و پس جواب عمومی معادله را پیدا کنید.

$$M = 4xy + 3y^2 - x \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 4x + 6y$$

$$N = x^2 + 2xy \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = 2x + 2y$$

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{1}{x(x+2y)}(4x+6y-2x-2y) = \frac{2x+4y}{x(x+2y)} = \frac{2}{x}$$

$$\Rightarrow \mu(x) = e^{\int \frac{2}{x}dx} = e^{2\ln x} = x^2$$

طرفین معادله داده شده را در x^2 ضرب می‌کنیم:

$$(4x^3y + 3x^2y^2 - x^3)dx + x^3(x+2y)dy = 0$$

$$4x^3 + 6x^2y = 4x^3 + 6x^2y \Rightarrow$$ معادله کامل است

حال جواب عمومی را بدست می‌آوریم:

$$f(x,y) = \int (4x^3y + 3x^2y^2 - x^3)dx + h(y) = \underbrace{x^4y + x^3y^2 - \frac{x^4}{4} + h(y)}_{*}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y) \Rightarrow x^4 + 2x^3y + \frac{\partial h(y)}{\partial y} = x^4 + 2x^3y \Rightarrow \frac{\partial h(y)}{\partial y} = 0$$

پس جواب عمومی برابر است با:

$$* \quad x^4y + x^3y^2 - \frac{x^4}{4} = C$$

مثال ۵: یک عامل انتگرال‌ساز برای معادله زیر بدست آورده، جواب عمومی آنرا تعیین کنید.

$$(\sin y + \cos y)dx + 2x\cos y\, dy = 0$$

$$M = \sin y + \cos y \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \cos y - \sin y$$

$\Rightarrow$ کامل نیست

$$N = 2x\cos y \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = 2\cos y$$

$$\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = -g(y) \Rightarrow \frac{1}{\sin y + \cos y}(\cos y - \sin y - 2\cos y)$$

$$\Rightarrow -g(y) = -\frac{\sin y + \cos y}{\sin y + \cos y} \Rightarrow g(y) = 1$$

$$\Rightarrow \mu(y) = \exp\left(\int g(y)\,dy\right) = e^{\int dy} = e^{y}$$

معادله را در e^{y} ضرب می‌کنیم:

$$e^{y}(\sin y + \cos y)\,dx + e^{y}.2x\cos y\,dy = 0$$

جواب عمومی:

$$f(x,y) = \int e^{y}\sin y + e^{y}\cos y\,dx + h(y) = xe^{y}(\sin y + \cos y) + h(y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = xe^{y}(\sin y + \cos y) + (\cos y - \sin y)\,xe^{y} + \frac{\partial h(y)}{\partial y} =$$

$$2xe^{y}\cos y \Rightarrow \frac{\partial h(y)}{\partial y} = 0$$

جواب عمومی: $f(x,y) = xe^{y}(\sin y + \cos y) = C$

6.2 معادلات خطی مرتبه اول — مسائل ۱ تا ۷ را حل کنید

این معادلات بشکل کلی زیر هستند:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x) \qquad (1)$$

که $p(x)$ و $q(x)$ توابعی پیوسته از x می‌باشند. برای تعیین جوابهای رابطه (1) آنرا بصورت

زیر می‌نویسیم:

$$\frac{dy}{dx} = q(x) - p(x)y \Rightarrow dy = (q(x) - p(x)y)\,dx \Rightarrow$$

$$(q(x) - p(x)y)\,dx - d(y) = 0 \qquad (2)$$

اگر تعریف کنیم: $N(x,y)=-1$ و $M(x,y)=q(x)-p(x)y$

آنگاه معادله (2) به شکل $Mdx+Ndy=0$ است که در حالت کلی کامل نیست بنابه

قسمت قبل: $\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=-1\left(-p(x)-0\right)=p(x)$

پس معادله (2) یا معادل آن (1) دارای عامل انتگرال سازی بصورت زیر است:

$$\mu(x)=e^{\int p(x)dx} \qquad (3)$$

طرفین معادله (1) را در $\mu(x)$ ضرب می‌کنیم، داریم:

$$y'e^{\int p(x)dx}+p(x)ye^{\int p(x)dx}=q(x)e^{\int p(x)dx}$$

می‌توان نوشت: $\frac{d}{dx}\left(ye^{\int p(x)dx}\right)=q(x)e^{\int p(x)dx}$

پس با انتگرالگیری خواهیم داشت:

$$ye^{\int p(x)dx}=\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+c$$

وجواب عمومی (1) بصورت صریح چنین است:

$$y=\frac{1}{\mu(x)}\left[\int q(x)\mu(x)dx+c\right] \qquad (4)$$

که $\mu(x)$ با (3) تعریف می‌شود.

نکته: در معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول، اگر $q(x)=0$ باشد، معادله همگن و در غیر اینصورت آنرا ناهمگن می‌نامیم.

مثال ۱. جواب عمومی معادله مرتبه اول: $y'+y=\frac{1}{1+e^{2x}}$ را بدست آورده و

یک جواب خصوصی آن را که در شرط $y(0)=1$ صدق می‌کند پیدا کنید.

$$\frac{dy}{dx}+y=\frac{1}{1+e^{2x}} \qquad p(x)=1 \qquad q(x)=\frac{1}{1+e^{2x}}$$

$$y=\frac{1}{\mu(x)}\int q(x)\mu(x)dx+c=\frac{1}{e^{x}}\left\{\int\frac{1}{1+e^{2x}}\cdot e^{x}dx+c\right\}$$

$$=\boxed{e^{-x}\left\{Tan^{-1}(e^{x})+c\right\}=y}$$

$$\begin{cases} e^{x}=u \Rightarrow e^{x}dx=du \quad , \quad (e^{x})^2=e^{2x}=u^2 \\ \int\frac{e^{x}}{1+e^{2x}}dx=\int\frac{du}{1+u^2}=Arc\,Tan\,u=Tan^{-1}u=Tan^{-1}(e^{x}) \end{cases}$$

$$x=0\ ,\ y=1 \Rightarrow 1=e^{0}\left\{Tan^{-1}(0)+C\right\}\Rightarrow \boxed{C=1-\frac{\pi}{4}}$$

جواب خصوصی: $y=e^{-x}\left\{Tan^{-1}(e^{x})+1-\frac{\pi}{4}\right\}$

مثال 2. جواب عمومی معادله زیر را تعیین کنید: $xy'+y=3x^2$

حل: معادله خطی است و برای $x\neq 0$ داریم

$$\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=3x \qquad p(x)=\frac{1}{x} \qquad q(x)=3x$$

$$\mu(x)=e^{\int p(x)dx}=e^{Ln|x|}=|x|$$

اگر $x>0$ باشد آنگاه

$$y=\frac{1}{x}\left(\int 3x^2dx+c_1\right)=x^2+\frac{c_1}{x}$$

اگر $x>0$ باشد آنگاه $\mu(x)=-x$ است و داریم:

$$y=-\frac{1}{x}\left(\int -3x^2\,dx+c\right)=x^2-\frac{c_2}{x}$$

چون c_1 و c_2 ثابتهای دلخواه هستند، پس جواب عمومی بصورت زیر نوشته می‌شود.

$$y=x^2+\frac{c}{x} \qquad x\neq 0$$ c ثابت دلخواه است.

مثال: جواب معادله دیفرانسیل زیر را بیابید.

$$\frac{dy}{dx}+2xy=4x$$ معادله خطی مرتبه اول

$$p(x)=2x \qquad q(x)=4x$$

$$\mu(x)=e^{\int 2x\,dx}=e^{x^2}$$

$$y=e^{-x^2}\left(\int 4x.e^{x^2}\,dx+c\right)=e^{-x^2}\left(2e^{x^2}+c\right)=2+ce^{-x^2}$$

$$x^2=u \Rightarrow 2x\,dx=du \Rightarrow 2\int e^u\,du$$

7.2 معادلات برنولی

این معادلات بشکل کلی زیر هستند:

$$y'+p(x)y=q(x)y^n \qquad (1)$$

که در آن $p(x)$ و $q(x)$ توابعی پیوسته از x می‌باشند این معادلات با یک تعویض متغیر تبدیل به معادلات خطی می‌شوند. اگر $n=0$ یا $n=1$ باشد معادله خطی است

بس فرض می‌کنیم $n \neq 0$ و $n \neq 1$. برای حل این معادله طرفین آنرا بر y^n

تقسیم می‌کنیم : $y^{-n} y' + p(x) y^{1-n} = q(x)$ (2)

قرار می‌دهیم $u = y^{1-n}$ که u تابعی از x است . داریم :

$u' = (1-n) y' y^{-n}$

با جانشین کردن در معادله (2) ، معادله زیر نتیجه می‌شود :

$u' + (1-n) p(x) . u = (1-n) q(x)$ یا $\frac{u'}{1-n} + p(x) u = q(x)$

که یک معادله خطی است و با همان روش حل معادلات خطی حل می‌شود .

مثال ۱ : جواب عمومی معادله زیر را تعیین کنید :

$xy' + \frac{y}{2 \ln x} = y^2 \Rightarrow y' + \frac{y}{2x \ln x} = \frac{y^2}{x}$ معادله برنولی است

$p(x) = \frac{1}{2x \ln x}$ $q(x) = \frac{1}{x}$ $n = 2$

معادله برنولی را بصورت زیر می‌نویسیم :

$y^{-2} y' + \frac{1}{2x \ln x} y^{-1} = \frac{1}{x}$

$u = y^{1-n} = y^{-1} \Rightarrow u' = -y' y^{-2}$

با این تغییر متغیر معادله بصورت خطی زیر نوشته می‌شود :

$-y' y^{-2} - \frac{1}{2x \ln x} y^{-1} = -\frac{1}{x}$ $\Rightarrow$ ~~[illegible]~~

اضافی

$$u' - \frac{u}{2x\ln x} = -\frac{1}{x}$$

$$\mu(x) = e^{\int \frac{1}{2x\ln x}dx} = e^{\frac{1}{2}\ln(\ln x)} = (\ln x)^{1/2}$$

$$\begin{cases} \ln x = t \\ \frac{dx}{x} = dt \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2}\int \frac{1}{t}dt$$

پس جواب عمومی عبارت است از :

$$u = (\ln x)^{-\frac{1}{2}} \left(\int -\frac{1}{x} \cdot \frac{(\ln x)^{\frac{1}{2}}}{u} dx + c \right)$$

یا

$$u = -\frac{2}{3}\ln x + c(\ln x)^{-\frac{1}{2}}$$

پس جواب عمومی معادله برنولی چنین است :

$$y = 1 / \left(-\frac{2}{3}\ln x + c(\ln x)^{-1/2}\right)$$

8.2 معادله کلرو

هر معادله دیفرانسیل بصورت $y = xy' + f(y')$ معادله کلرو نامیده می‌شود. جواب عمومی این معادله بصورت $y = xc + f(c)$ می‌باشد.

مثال : معادله کلرو زیر را حل نمایید:

$$y = xy' - \frac{1}{4}(y')^2$$

با قرار دادن $y' = c$ جواب زیر حاصل می‌شود :

$$y = cx - \frac{1}{4}c^2$$

مثال : جواب معادله‌ی $x = \frac{y}{y'} + y'^2$ را بدست آورید :

$$x = \frac{y}{y'} + y'^2 \Rightarrow xy' = y + y'^3 \Rightarrow y = xy' - y'^3$$

$$y = xy' - y'^3 \equiv y = xy' + f(y') \Rightarrow f(y') = -y'^3$$

معادله کلرو است پس جواب عمومی آن بصورت زیر می‌باشد :

$$y' = C \Rightarrow y = xC - C^3$$

مثال (معادلات جداپذیر) :

$$-x\,dx + e^y\,dy = 0 \Rightarrow \text{جداپذیر است}$$

$$\int -x\,dx + \int e^y\,dy = 0 \Rightarrow -\frac{x^2}{2} + e^y = C \Rightarrow e^y = \frac{x^2}{2} + C \Rightarrow$$

$$y = \ln\left(\frac{x^2}{2} + C\right)$$

$$\frac{xy\,dx}{y} + \frac{dy}{y} = 0 \Longrightarrow x\,dx + \frac{1}{y}\,dy = 0 \Rightarrow \text{جداپذیر}$$

$$\Rightarrow \int x\,dx + \int \frac{1}{y}\,dy = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{2} + \ln y = C \Rightarrow$$

$$\ln y = C - \frac{x^2}{2} \Rightarrow y = e^{C - \frac{x^2}{2}}$$

معادلات خطی جدایی‌پذیر

۱- جواب عمومی معادله دیفرانسیل $(y+1)dx - \tan x\, dy = 0$ را بدست آورید.

۲- کدامیک از جوابهای زیر جواب معادله دیفرانسیل $2xy' - y = 0$ است.

۱. $y = e^{k\sqrt{x}}$ ۲. $y = kx^2$ ۳. $y = \frac{k}{\sqrt{x}}$ ۴. $y = k\sqrt{x}$

۳- جواب معادله دیفرانسیل $(1+x^3)dy - (x^2y)dx = 0$ با شرط $y(1) = 1$ را بدست آورید.

۴- جواب عمومی معادله دیفرانسیل‌های زیر را بدست آورید.

1. $x\frac{dy}{dx} + y^2 = 4$ 2. $x\,dy - (1+y^2)\,dx = 0$

معادلات همگن:

۵- جواب معادله همگن $(x+y)dx - (x-y)dy = 0$ را بدست آورید.

۶- جواب عمومی معادله دیفرانسیل $\frac{dy}{dx} = \frac{2x^3+y^3}{xy^2}$ را بدست آورید.

معادلات کامل:

۱- جواب عمومی معادله زیر را تعیین کنید:

1. $(2y^2 - 4x + 5)dx + (4 - 2y + 4xy)dy = 0$

2. $(3x^2 + 4xy)dx + (2x^2 + 2y)dy = 0$

3. $\cos y\, dx + \sin x\, dy = 0 \Rightarrow \frac{dx}{\sin x} + \frac{dy}{\cos y} = 0 \quad \csc x\, dx + \sec y\, dy = 0$

4. $(e^x \cos y - x^2)\, dx + (e^y \sin x + y^2)\, dy = 0$

2ـ معادله دیفرانسیل $(x^{-1} + y^{-1})\, dx + a x y^{-2}\, dy = 0$ به ازای چه مقداری از a کامل است.

3ـ کدامیک از معادلات دیفرانسیل زیر کاملند:

1) $(2xye^{x^2} - 2x)\, dx + e^{x^2}\, dy = 0$ (1

2) $(x^4 + y^4)\, dx - xy^3\, dy = 0$

3) $(x + y + x^2)\, dx + (x + y + y^2)\, dx = 0$

4) $(y\cos x + \sin y + y)\, dx + (\sin x + x\cos y + x)\, dy = 0$

معادلات برنولی:

1ـ جواب عمومی معادله دیفرانسیل را بدست آورید $y' + y = \frac{x}{y}$

2ـ معادله $y' - y = xy^5$ با شرط $y(\frac{1}{4}) = 1$ داده شده است $y(0)$ را بدست آورید.

3ـ جواب معادله دیفرانسیل مقابل را بدست آورید. $\frac{dy}{dx} + 2xy + xy^4 = 0$

4ـ معادله $y' = \frac{y}{x} + \frac{2x^3 \cos x^2}{y}$ با شرط $y(\sqrt{\pi}) = 0$ در $x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ دارای چه جوابی می‌باشد؟

«فصل سوم»

«معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم»

3.1. معادلات خطی رتبه دوم:

این معادلات به شکل کلی زیر هستند:

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x) \qquad (1)$$

که در آن ضریب $a_2(x)$ متحد با صفر نیست. معادله (1) را می‌توان با تقسیم طرفین آن بر $a_2(x)$ به صورت ساده‌تر زیر نوشت:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \qquad (2)$$

مقادیری از x که به ازای آنها $a_2(x)=0$، نقاط تکین معادله (1) نامیده می‌شوند.

اگر در رابطه (2)، $f(x)=0$ باشد، معادله همگن و در غیر اینصورت، غیر همگن نامیده می‌شود. توابع $p(x)$ و $q(x)$ را ضرائب معادله می‌نامیم، اگر p و q دو عدد ثابت باشند معادله را، معادله خطی با ضرائب ثابت می‌نامیم.

تنصیه: اگر y_1 یک جواب معادله دیفرانسیل خطی همگن $\underbrace{y'' + p(x)y' + q(x)y = 0}_{(3)}$ باشد، آنگاه $y = cy_1$ نیز یک جواب معادله خواهد بود (c ثابت دلخواه).

تنصیه: اگر y_1 و y_2 دو جواب معادله دیفرانسیل خطی همگن (3) باشند، آنگاه $y_1 + y_2$ نیز یک جواب معادله (3) می‌باشد.

Subject:

Data:

از دو قضیه بالا نتیجه می‌گیریم که اگر y_1 و y_2 دو جواب معادله (3) باشند آنگاه $c_1y_1+c_2y_2$ نیز یک جواب خواهد بود.

توجه: شرط آنکه $c_1y_1+c_2y_2$ بتواند جواب عمومی معادله (3) باشد آنست که y_1 و y_2 مستقل باشند. به عبارت دیگر ($\frac{y_1}{y_2} \neq$ مقدار ثابت)

تعریف: فرض کنید دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ در بازه $[a,b]$ تعریف شده باشند و k ثابتی باشد که

$$f(x)=k\,g(x) \qquad \forall x\in[a,b]$$

در اینصورت می‌گوییم که این دو تابع در بازه‌ی $[a,b]$ نامستقل خطی اند و در غیر اینصورت آنها را در این بازه مستقل خطی می‌نامیم.

مثال: دو تابع $f(x)=\sin x$ و $g(x)=-3\sin x$ نامستقل خطی اند.

مثال: دو تابع $f(x)=e^x$ و $g(x)=xe^x$ مستقل خطی اند.

تعریف: فرض کنید $y_1(x)$ و $y_2(x)$ دو جواب معادله همگن (3) باشند رونسکی این دو جواب را با $W(y_1,y_2)$ یا $W(x)$ نشان می‌دهند و بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x)-y_2(x)y_1'(x)$$

مثال: توابع $y_1 = e^x$ و $y_2 = e^{2x}$ جوابهای معادله همگن $y'' - 3y' + 2y = 0$ هستند.

رونسکی آنها عبارت است از:

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} \\ e^x & 2e^{2x} \end{vmatrix} = 2e^{3x} - e^{3x} = e^{3x}$$

قضیه: اگر $y_1(x)$ و $y_2(x)$ جوابهای معادله همگن (3) در بازه $[a,b]$ باشند، آنگاه این دو جواب در این بازه مستقل خطی اند اگر و فقط اگر $W(x) = W(y_1, y_2) \neq 0$

قضیه: (اصل برهمنهی جوابها): اگر $y_p(x)$ و $\tilde{y}_p(x)$ به ترتیب جوابهای معادلات:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x)$$

و

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_2(x)$$

باشند، آنگاه جواب معادله $y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x) + f_2(x)$

برابر است با:

$$y(x) = y_p(x) + \tilde{y}_p(x)$$

جواب عمومی معادله ناهمگن: معادله دیفرانسیل $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ را در نظر می‌گیریم هرگاه y_h جواب عمومی معادله دیفرانسیل همگن متناظر این معادله و y_p یک جواب خصوصی معادله دیفرانسیل ناهمگن باشد. جواب عمومی معادله دیفرانسیل ناهمگن برابر مجموع این دو جواب خواهد بود:

$$y = y_h + y_p$$

معادلات خطی مرتبه دوم همگن با ضرایب ثابت

شکل کلی یک معادله خطی مرتبه دوم همگن با ضرایب ثابت عبارت است از:

$$y'' + ay' + by = 0 \qquad (1)$$

که a و b ثابت هستند. بطوریکه دیدیم، اگر $y_1(x)$ و $y_2(x)$ دو جواب مستقل خطی معادله (1) باشند، آنگاه:

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \qquad (*)$$

جواب عمومی (1) است. برای یافتن $y_1(x)$ و $y_2(x)$، جوابهایی برای معادله (1) به شکل:

$$y = e^{\lambda x} \qquad (2)$$

جستجو می‌کنیم که λ یک ثابت است. با جانشین کردن (2) در (1) خواهیم داشت،

$$(\lambda^2 + a\lambda + b)e^{\lambda x} = 0$$

چون $e^{\lambda x} \neq 0$، پس:

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0 \qquad (3)$$

یعنی (2) جواب (1) است اگر و فقط اگر λ ریشه معادله درجه دوم (3) باشد.

این معادله، معادله مشخصه معادله دیفرانسیل (1) نامیده می‌شود. پس ممکن است سه حالت رخ دهد.

حالت 1: $\Delta > 0$ باشد. معادله مشخصه مفسر دارای دو ریشه حقیقی متمایز λ_1 و λ_2 است. در این حالت:

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \quad y_2 = e^{\lambda_2 x}$$

جوابهای مستقل خطی معادله (1) هستند پس جواب عمومی رابطه (1) بصورت زیر است:

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

حالت 2: معادله مشخصه دارای ریشه مضاعف $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ می باشد ($\Delta = 0$) در اینصورت

$\lambda = -\frac{a}{2}$ و

$$y_1 = e^{\lambda x} = e^{-\frac{a}{2}x}$$

یک جواب معادله همگن است. و جواب دیگر $y_2 = x e^{\lambda x}$ و جواب عمومی در

این حالت چنین است:

$$y = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}$$

حالت 3: $\Delta < 0$، معادله مشخصه (3) دارای دو ریشه مختلط مزدوج $\lambda_1 = \alpha + i\beta$

و $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ است. در این حالت، توابع مختلط:

$$y = e^{(\alpha - i\beta)x} \quad , \quad y = e^{(\alpha + i\beta)x}$$

جوابهای (1) هستند. برای آنکه جوابهای حقیقی برای معادله بدست آوریم، می نویسیم:

$$e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)$$

$$e^{(\alpha - i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x)$$

چون معادله (1) خطی است، پس هر ترکیبی از جوابهای فوق، نیز جواب است. در

حالت خاص، هریک از توابع:

$$y_1 = \frac{1}{2} e^{(\alpha+i\beta)x} + \frac{1}{2} e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x} \cos\beta x$$

و

$$y_2 = \frac{1}{2i} e^{(\alpha+i\beta)x} - \frac{1}{2i} e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x} \sin\beta x$$

جواب (۱) هستند و چون مستقل خطی اند، لذا جواب عمومی در این حالت به صورت

زیر نوشته می‌شود: $y = e^{\alpha x}(c_1 \cos\beta x + c_2 \sin\beta x)$

مثال ۹. جواب عمومی معادله: $y'' - 3y' + 2y = 0$ را بدست آورید و یک جواب

خصوصی با شرایط $y(0)=3$ و $y'(0)=5$، تعیین کنید.

حل: معادله مشخصه عبارت است از: $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$

$\Rightarrow (\lambda-2)(\lambda-1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1 \quad , \quad \lambda_2 = 2$

پس جواب عمومی چنین است: $y(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x}$

داریم: $y'(x) = c_1 e^{x} + 2c_2 e^{2x}$

$y(0) = 3 \quad , \quad y'(0) = 5 \quad \Leftarrow$

$c_1 e^{0} + c_2 e^{0} = 3 \Rightarrow c_1 + c_2 = 3$

$\Rightarrow c_1 = 1 \quad , \quad c_2 = 2$

$c_1 e^{0} + 2c_2 e^{0} = 5 \Rightarrow c_1 + 2c_2 = 5$

جواب خصوصی عبارت است از:

$$y = e^{x} + 2e^{2x}$$

مثال 2. جواب عمومی معادله زیر را پیدا کنید: $4y''+y'=0$

$$4\lambda^2+\lambda=0 \Rightarrow \lambda_1=0 \quad , \quad \lambda_2=-\frac{1}{4}$$

$$y=c_1e^{\lambda_1 x}+c_2e^{\lambda_2 x}=c_1e^{0x}+c_2e^{-\frac{x}{4}}=c_1+c_2e^{-\frac{x}{4}}$$

مثال 3. جواب عمومی معادله زیر را بدست آورید: $y''-6y'+9y=0$

$$\lambda^2-6\lambda+9=0 \Rightarrow (\lambda-3)^2=0 \Rightarrow \lambda=3$$

$$y=c_1e^{3x}+c_2xe^{3x}=(c_1+c_2x)e^{3x}$$

مثال 4. جواب عمومی معادله زیر را پیدا کنید: $y''+2y'+5y=0$

$$\lambda^2+2\lambda+5=0 \Rightarrow \Delta=4-20=-16<0 \qquad \frac{-2\pm\sqrt{-16}}{2}=\frac{-2\pm4i}{2}=-1\pm2i$$

و ریشه‌های آن برابر است با: $\lambda=-1\pm2i$

پس، جواب عمومی چنین است: $y=e^{-x}(c_1\cos2x+c_2\sin2x)$

معادلات خطی رتبه n:

این معادلات به شکل کلی زیر هستند:

$$a_n(x)y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\dots+a_1(x)y'+a_0(x)y=f(x) \qquad (1)$$

اگر $f(x)=0$ برابر با صفر باشد معادله را همگن و در غیر اینصورت ناهمگن نامیده می‌شود.

قضیه: اگر $y_1(x)$ و $y_2(x)$ و ... و $y_k(x)$ جوابهای معادله همگن باشند، آنگاه:

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_k y_k(x)$$

که c_1 و ... و c_k، ثابتهای دلخواه هستند، نیز جواب معادله همگن است. به عبارت دیگر

هر ترکیب خطی از جوابها، نیز جواب معادله است. (اگر y_1 و ... و y_k مستقل خطی باشند $\Leftarrow$ y جواب عمومی است)

تعریف: فرض کنید توابع $f_1(x)$، $f_2(x)$، ...، $f_n(x)$ بر بازه $a \leqslant x \leqslant b$ تعریف شده

باشند. اگر ثابتهای c_1 و ... و c_n که همگی صفر نیستند، وجود داشته باشند بطوریکه:

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x) = 0 \qquad a \leq x \leq b$$

آنگاه گفته می‌شود این توابع بر بازه $a \leqslant x \leqslant b$ نامستقل خطی اند؛ در غیر اینصورت

این توابع بر بازه مستقل خطی نامیده می‌شوند.

رونسکی: اگر توابع f_1 و f_2 و ... و f_n جوابهای مستقل خطی معادله دیفرانسیل خطی

همگن روی فاصله $[a, b]$ باشند آنگاه:

$$W(x) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ \vdots & & & \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

در هیچ نقطه‌ای از $[a, b]$ نمی‌تواند صفر باشد. $W(x)$ را رونسکی f_1 و ... و f_n می‌نامند.

معادلات خطی همگن رتبه n با ضرایب ثابت :

این معادلات به شکل کلی زیر هستند ،

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

که هر ضریب a_i ثابت است و اولین ضریب $a_n \neq 0$. برای یافتن جواب عمومی

به n جواب مستقل نیاز داریم . همانگونه که در مورد معادلات رتبه دو گفتیم توابع

نمائی به شکل $y = e^{\lambda x}$ در معادله خطی همگن صدق می کنند $y = e^{\lambda x}$ جواب معادله

است اگر و تنها اگر λ ریشه معادله مشخصه زیر باشد :

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

این معادله دارای n ریشه است ، یافتن این ریشه‌ها برای $n \geq 3$ به سادگی امکانپذیر نیست .

مثال ، جواب عمومی معادله رتبه سوم زیر را بدست آورید .

$$y''' - 2y'' - 5y' + 6y = 0$$

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$ یک ریشه معادله مشخصه $\lambda = 1$ می باشد

پس با تقسیم معادله بر $\lambda - 1$ بدست می آوریم : $(\lambda-1)(\lambda^2-\lambda-6) = 0$

$$(\lambda-1)(\lambda+2)(\lambda-3) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1 \ , \ \lambda_2 = -2 \ , \ \lambda_3 = 3$$

لذا هر یک از توابع $y_1 = e^{x}$ ، $y_2 = e^{-2x}$ و $y_3 = e^{3x}$

جواب معادله هستند. این جوابها مستقل خطی اند زیرا:

$$W(x)=\begin{vmatrix} e^{x} & e^{-2x} & e^{3x} \\ e^{x} & -2e^{-2x} & 3e^{3x} \\ e^{x} & 4e^{-2x} & 9e^{3x} \end{vmatrix} = -30e^{2x} \neq 0$$

پس، جواب عمومی چنین است:

$$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{3x}$$

مثال 2. معادله زیر را حل کنید: $y''' - 3y' + 2y = 0$

$$\lambda^3 - 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow (\lambda-1)^2(\lambda+2) = 0$$

$\lambda = 1$ ریشه مضاعف و $\lambda = -2$ ریشه ساده می باشد.

$$y_1 = e^{x} \qquad y_2 = xe^{x} \qquad y_3 = e^{-2x}$$

جوابهای مستقل خطی معادله هستند. جواب عمومی برابر است با:

$$y = c_1 e^{x} + c_2 x e^{x} + c_3 e^{-2x}$$

روش ضرایب نامعین:

معادله دیفرانسیل زیر را درنظر می‌گیریم:

$$ay'' + by' + cy = g(x)$$

که a و b و c ثابتند، برای حل معادله‌ی فوق ابتدا جواب عمومی معادله همگن متناظر را بدست آورد و سپس با توجه به $g(x)$، یک جواب خصوصی را حدس زده و با جاگذاری در معادله ضرایب آنرا بدست می‌آوریم. این روش را فقط در حالتهای خاص که $g(x)$ به شکلهای زیر باشد می‌توان بکار برد.

۱. هرگاه $g(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه n باشد دو حالت داریم:

$$g(x) = P_n(x) = K_0 + K_1 x + \dots + K_n x^n$$

الف ـ اگر عدد صفر ریشه‌ی معادله مشخصه معادله همگن نباشد جواب خصوصی به شکل

$$y_p = Q_n(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots + A_n x^n$$

جواب خصوصی

ب ـ اگر صفر، ریشه‌ی معادله‌ی مشخصه معادله همگن از درجه تکرار m باشد:

$$y_p = x^m Q_n(x) = x^m (A_0 + A_1 x + \dots + A_n x^n)$$

(y_p جواب خصوصی حدس زده شده و $Q_n(x)$ چندجمله‌ای از درجه n با ضرایب مجهول است)

مثال. معادله $y'' - 5y' + 6y = 2x^2 + 1$ را درنظر می‌گیریم:

معادله همگن متناظر: $y'' - 5y' + 6y = 0$

معادله مشخصه: $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \Rightarrow (\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 3 \end{cases}$

$g(x)=2x^2+1$ یک چندجمله‌ای از مرتبه دوم است و صفر هم ریشه‌ی معادله‌ی مشخصه نیست.

پس جواب خصوصی را به صورت $y_p = A_0 + A_1 x + A_2 x^2$ حدس می‌زنیم.

مثال: معادله $y'' - 4y' = 5x - 1$ را در نظر می‌گیریم:

معادله همگن متناظر : $y'' - 4y' = 0$

معادله مشخصه : $\lambda^2 - 4\lambda = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda-4)=0 \Rightarrow \lambda_1 = 0 \ , \ \lambda_2 = 4$

$g(x) = 5x - 1$ یک چندجمله‌ای از مرتبه اول است و صفر، $\underbrace{\text{ریشه مرتبه اول معادله مشخصه}}_{m=1}$

است. پس جواب خصوصی را به صورت $y_p = x(Ax+B)$ حدس می‌زنیم.

2. هرگاه $g(x)$ حاصلضرب تابع $e^{\beta x}$ در یک چندجمله‌ای مرتبه n باشد، داریم:

$$g(x) = e^{\beta x} P_n(x) = e^{\beta x}(k_0 + k_1 x + \dots + k_n x^n)$$

الف - β ریشه‌ی معادله مشخصه معادله همگن نباشد:

$$y_p = e^{\beta x} Q_n(x) = e^{\beta x}(A_0 + A_1 x + \dots + A_n x^n)$$

ب - β ریشه‌ی معادله مشخصه معادله همگن از مرتبه تکرار m باشد:

$$y_p = x^m e^{\beta x} Q_n(x) = x^m e^{\beta x}(A_0 + A_1 x + \dots + A_n x^n)$$

(y_p جواب خصوصی حدس زده شده و $Q_n(x)$ چندجمله‌ای از مرتبه n با ضرایب مجهول است)

مثال. معادله $y'' - 2y' - 3y = 2xe^{2x}$ را در نظر می‌گیریم:

معادله همگن متناظر : $y'' - 2y' - 3y = 0$

معادله مشخصه : $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \Rightarrow (\lambda+1)(\lambda-3) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 3 \ , \ \lambda = -1$

$g(x) = 2xe^{2x}$ می باشد پس $\beta = 2$ ، ریشه‌ی معادله مشخصه معادله همگن نیست پس

جواب خصوصی را بصورت $y_p = (Ax+B)e^{2x}$ حدس می زنیم.

مثال: معادله $y'' + 2y' + y = 2e^{-x}$ را درنظر می گیریم.

معادله همگن متناظر : $y'' + 2y' + y = 0$

معادله مشخصه : $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow (\lambda+1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -1$

$g(x) = 2e^{-x}$ بوده و $\beta = -1$ ریشه‌ی تکراری $\underbrace{\text{از مرتبه دوم}}_{m=2}$ معادله مشخصه معادله همگن

است. پس جواب خصوصی را به صورت $y_p = Ax^2 e^{-x}$ درنظر می گیریم.

3- هرگاه $g(x)$ بصورت مقابل باشد داریم:

$g(x) = P_n(x) \cos\beta x + Q_m(x) \sin\beta x$

یا $g(x) = P_n(x) \cos\beta x$ یا $g(x) = Q_m(x) \sin\beta(x)$

* $P_n(x) = k_0 + k_1 x + \dots + k_n x^n$ و $Q_m(x) = k'_0 + k'_1 x + \dots + k'_n x^n$

دو حالت داریم:

الف - اگر $\pm i\beta$ ریشه‌های معادله مشخصه معادله همگن نباشند:

$y_p = R_d(x) \cos\beta x + S_d(x) \sin\beta x$ $\quad d: \max(m,n)$

ب - اگر $\pm i\beta$ ریشه‌های معادله مشخصه معادله همگن از مرتبه تکرار s باشند:

$y_p = x^s \left(R_d(x) \cos\beta x + S_d(x) \sin\beta(x)\right)$

d. بالاترین رتبه $P_n(x)$ و $Q_m(x)$ است.

مثال: معادله $y'' + y = 3\sin 2x + x\cos 2x$ را درنظر می‌گیریم:

معادله همگن متناظر: $y''+y=0$

معادله مشخصه: $\lambda^2+1=0 \Rightarrow \lambda^2=-1 \Rightarrow \lambda_1=i \quad \lambda_2=-i$

$g(x)=3\sin 2x + x\cos 2x$ بوده و $\pm 2i$ ریشه‌های معادله مشخصه معادله همگن نیستند پس

جواب خصوصی را بصورت زیر درنظر می‌گیریم:

$$y_p=(A_0x+A_1)\cos 2x+(B_0x+B_1)\sin 2x$$

مثال: معادله $y''+4y=\cos 2x$ را درنظر می‌گیریم:

معادله همگن متناظر: $y''+4y=0$

معادله مشخصه: $\lambda^2+4=0 \Rightarrow \lambda=\pm 2i$

$g(x)=\cos 2x$ بوده و $\pm 2i$ ریشه‌های معادله مشخصه معادله همگن با رتبه تکرار 1 هستند

پس جواب خصوصی را بصورت زیر درنظر می‌گیریم:

$$y_p=x(A\cos 2x+B\sin 2x)$$

9. هرگاه $g(x)$ بصورت زیر باشد:

$$g(x)=e^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x\right)$$

دو حالت داریم:

الف ـ اگر $\alpha \pm i\beta$ ریشه‌های معادله مشخصه معادله همگن نباشند:

$$y_p=e^{\alpha x}\left(R_k(x)\cos\beta x+S_k(x)\sin\beta x\right)$$

ب ـ اگر $\alpha\pm i\beta$ ریشه‌های معادله مشخصه معادله همگن از رتبه تکرار s باشند:

$$y_p=x^s e^{\alpha x}\left(R_k(x)\cos\beta x+S_k(x)\sin\beta x\right)$$

مثال: معادله $y''+2y'+5y=x^2e^{-x}\sin 2x$ را درنظر می‌گیریم:

معادله همگن متناظر: $y''+2y'+5y=0$

معادله مشخصه : $\lambda^2+2\lambda+5=0 \Rightarrow \Delta=b^2-4ac=4-4\times5=-16$

$\lambda=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2\pm\sqrt{-16}}{2}=\frac{-2\pm4i}{2}=-1\pm2i$

$g(x)=x^2e^{-x}\sin 2x$ بوده و $-1\pm2i$ ریشه‌های معادله همگن متناظر با رتبه تکرار ۱ هستند. پس :

$y_p=xe^{-x}\left((A_0+A_1x+A_2x^2)\sin 2x+(B_0+B_1x+B_2x^2)\cos 2x\right)$

مثال: جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y''+y=\cos x$ را بدست آورید.

معادله همگن : $y''+y=0$

معادله مشخصه : $\lambda^2+1=0 \Rightarrow \lambda=\pm i$

جواب عمومی معادله همگن : $y_h=C_1\cos x+C_2\sin x$

با توجه به اینکه $g(x)=\cos x$ بوده و $\pm i$ ریشه‌های رتبه اول معادله مشخصه معادله همگن هستند جواب خصوصی را به شکل زیر درنظر می‌گیریم:

$y_p=x(A\cos x+B\sin x)$

$y_p'=A\cos x+B\sin x+x(-A\sin x+B\cos x)$

$y_p''=-A\sin x+B\cos x-A\sin x+B\cos x+x(-A\cos x-B\sin x)$

$\Rightarrow y_p''=-2A\sin x+2B\cos x+x(-A\cos x-B\sin x)$

با جایگذاری در معادله دیفرانسیل :

$y''+y=\cos x \Rightarrow -2A\sin x+2B\cos x+x(-A\cos x-B\sin x)$

$+x(A\cos x+B\sin x)=\cos x \Rightarrow -2A\sin x+2B\cos x-\cancel{Ax\cos x}$

$-\cancel{Bx\sin x}+\cancel{Ax\cos x}+\cancel{Bx\sin x}=\cos x \Rightarrow$

$-2A\sin x+2B\cos x=\cos x \Rightarrow \begin{cases}-2A=0 \Rightarrow A=0\\ 2B=1 \Rightarrow B=\frac{1}{2}\end{cases}$

$$\Rightarrow y_p = \frac{1}{2} x \sin x$$

$$y = y_h + y_p = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{2} x \sin x$$

- جواب معادله دیفرانسیل عبارت خواهد بود از مجموع جواب عمومی معادله همگن و یک جواب خصوصی معادله ناهمگن.

مثال: جواب خصوصی معادله $y'' - y = e^{x} + 2e^{2x}$ را بدست آورید.

معادله همگن متناظر : $y'' - y = 0$

معادله مشخصه : $\lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 1$

با توجه به اینکه $g(x) = e^{x} + 2e^{2x}$ و یک ریشه معادله مشخصه معادله همگن متناظر است

جواب خصوصی را به صورت $y_p = Axe^{x} + Be^{2x}$ در نظر می‌گیریم:

$$y_p' = Axe^{x} + Ae^{x} + 2Be^{2x}$$

$$y_p'' = Axe^{x} + 2Ae^{x} + 4Be^{2x}$$

با جایگذاری در معادله دیفرانسیل:

$$\cancel{Axe^{x}} + 2Ae^{x} + 4Be^{2x} - \cancel{Axe^{x}} - Be^{2x} = e^{x} + 2e^{2x}$$

$$\Rightarrow 2Ae^{x} + 3Be^{2x} = e^{x} + 2e^{2x} \Rightarrow \begin{cases} 2A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2} \\ 3B = 2 \Rightarrow B = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_p = \frac{1}{2} xe^{x} + \frac{2}{3} e^{2x}$$

مثال: جواب کلی معادله دیفرانسیل $y''-4y'+4y=16e^{-2x}$ را بدست آورید

معادله همگن متناظر: $y''-4y'+4y=0$

معادله مشخصه: $\lambda^2-4\lambda+4=0 \Rightarrow (\lambda-2)^2=0 \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=2$

بنابراین جواب عمومی معادله همگن متناظر عبارت است از:

$y_h=(A_0+A_1x)e^{2x}$

با توجه به اینکه $g(x)=16e^{-2x}$ و اینکه 2- ریشه معادله مشخصه معادله همگن متناظر نیست

جواب خصوصی را بصورت $y_p=Ae^{-2x}$ در نظر میگیریم:

$$y_p=Ae^{-2x} \Rightarrow y'_p=-2Ae^{-2x} \Rightarrow y''_p=4Ae^{-2x}$$

با جایگذاری در معادله دیفرانسیل داریم:

$$y''-4y'+4y=16e^{-2x} \Rightarrow$$

$$4Ae^{-2x}-4(-2Ae^{-2x})+4(Ae^{-2x})=16e^{-2x} \Rightarrow$$

$$4Ae^{-2x}+8Ae^{-2x}+4Ae^{-2x}=16e^{-2x} \Rightarrow 16Ae^{-2x}=16e^{-2x} \Rightarrow$$

$$16A=16 \Rightarrow A=1 \Rightarrow y_p=e^{-2x}$$

پس جواب عمومی معادله بصورت زیر خواهد بود:

$$y=\left[(A_0+A_1x)e^{2x}\right]+e^{-2x}$$

روش تغییر پارامترها:

معادله مرتبه دوم:

$$y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = f(x) \qquad (1)$$

را درنظر گرفته و فرض کنید $y_1(x)$ و $y_2(x)$ دو جواب مستقل خطی معادله همگن نظیر، یعنی جوابهای معادله

$$y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = 0 \qquad (2)$$

باشند، پس جواب عمومی رابطه (2) عبارت است از:

$$y_h = c_1\, y_1(x) + c_2\, y_2(x) \qquad (3)$$

در روش تغییر پارامترها، به جای دو پارامتر c_1 و c_2 در (3) به ترتیب توابع $v_1(x)$ و $v_2(x)$ قرار داده و این توابع را طوری تعیین می‌کنیم که:

$$y_p(x) = v_1 y_1 + v_2 y_2 \qquad (4)$$

جواب خصوصی (1) باشد. با جانشین کردن (4) در (1) بدست می‌آوریم:

$$(v_1 y_1 + v_2 y_2)'' + p(x)(v_1 y_1 + v_2 y_2)' + q(x)\,(v_1 y_1 + v_2 y_2) = f(x) \qquad (5)$$

با توجه به اینکه $y_1'' + p(x) y_1' + q(x) y_1 = 0$ و $y_2'' + p(x) y_2' + q(x) y_2 = 0$، از (5) نتیجه می‌شود:

$$v_1'' y_1 + 2 v_1' y_1' + v_2'' y_2 + 2 v_2' y_2' + p(x)\left(v_1' y_1 + v_2' y_2 \right) = f(x) \qquad (6)$$

اگر v_1 و v_2 طوری انتخاب شوند که:

$$v_1' y_1 + v_2' y_2 = 0 \qquad (7)$$

آنگاه:
$$0=(v_1'y_1+v_2'y_2)'=v_1''y_1+v_1'y_1'+v_2'y_2'+v_2''y_2$$

و بنابراین (6) بصورت زیر در می‌آید:

$$v_1'y_1'+v_2'y_2'=f(x) \qquad (8)$$

پس (9) جواب (1) است اگر و فقط اگر v_1' و v_2' جواب دستگاه زیر باشند:

$$\begin{cases} v_1'(x)y_1+v_2'(x)y_2=0 \\ v_1'(x)y_1'+v_2'(x)y_2'=f(x) \end{cases} \qquad (9)$$

با استفاده از دستور کرامر داریم:

$$v_1'=\frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}}=\frac{-y_2 f(x)}{W(y_1,y_2)}$$

$$(10)$$

$$v_2'=\frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}}=\frac{y_1 f(x)}{W(y_1,y_2)}$$

و سپس با انتگرالگیری از $v_1'(x)$ و $v_2'(x)$ توابع $v_1(x)$ و $v_2(x)$ بدست می‌آیند

$$v_1(x)=\int\frac{-y_2 f(x)}{W(y_1,y_2)}\,dx \quad , \quad v_2(x)=\int\frac{y_1 f(x)}{W(y_1,y_2)}\,dx \qquad (11)$$

چون دو جواب y_1 و y_2 مستقل خطی اند، پس $W(y_1, y_2) \neq 0$ و لذا

دستگاه (۶) دارای جواب یکتاست. حال با $v_1(x)$ و $v_2(x)$ بصورت (11)،

$y_p(x)$ در (۴) جواب خصوصی معادله (۱) می باشد.

بطور خلاصه:

۱. معادله مرتبه دوم: $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$

را درنظر گرفته وفرض کنید $y_1(x)$ و $y_2(x)$ دو جواب مستقل خطی معادله همگن نظیر

یعنی جوابهای معادله: $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$

باشند.

2. جواب عمومی معادله همگن نظیر معادله ناهمگن را درنظر می گیریم:

$$y_h = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

3. به جای دو پارامتر c_1 و c_2 به ترتیب توابع $v_1(x)$ و $v_2(x)$ را قرار می دهیم.

$$y_p(x) = v_1(x) y_1 + v_2(x) y_2$$

۴. با استفاده از رابطه های زیر $v_1'(x)$ و $v_2'(x)$ را بدست می آوریم:

Subject: Date:

$$v_1'(x) = \frac{-y_2\, f(x)}{W(y_1, y_2)}$$

$$v_2'(x) = \frac{y_1\, f(x)}{W(y_1, y_2)}$$

$$* \quad W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1'$$

۴- با انتگرالگیری، توابع v_1 و v_2 بصورت زیر بدست می‌آید:

$$v_1(x) = \int \frac{-y_2\, f(x)}{W(y_1, y_2)}\, dx$$

$$v_2(x) = \int \frac{y_1\, f(x)}{W(y_1, y_2)}\, dx$$

حال با جایگذاری $v_1(x)$ و $v_2(x)$ در y_p که در مرحله (3) بیان شد، y_p

جواب خصوصی معادله مرتبه دوم می‌باشد.

مثال: جواب عمومی معادله زیر را بیابید.

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x} \qquad x>0$$

$y'' - 2y' + y = 0$: معادله همگن نظیر

DATA

معادله مشخصه : $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$

پس جواب عمومی معادله همگن چنین است :

$$y_h = c_1 e^x + c_2 x e^x$$

پس جواب خصوصی به شکل زیر است :

$$y_p = v_1(x) e^x + v_2(x) x e^x$$

$$\begin{cases} y_1 = e^x \\ y_2 = x e^x \\ f(x) = \dfrac{e^x}{x} \end{cases} \qquad w(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^x & x e^x \\ e^x & e^x + x e^x \end{vmatrix} =$$

$$e^x(e^x + x e^x) - x e^x (e^x) =$$

$$e^{2x} + x e^{2x} - x e^{2x} = e^{2x} \Rightarrow w(y_1, y_2) = e^{2x}$$

$$v_1' = \frac{-y_2 f(x)}{w(y_1, y_2)} = \frac{-x e^x \cdot \frac{e^x}{x}}{e^{2x}} = -1$$

$$\Rightarrow v_1 = \int -1\, dx = -\int dx = -x \Rightarrow \boxed{v_1 = -x}$$

$$v_2' = \frac{y_1 f(x)}{w(y_1, y_2)} = \frac{e^x \cdot \frac{e^x}{x}}{e^{2x}} = \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow v_2 = \int v_2'\, dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln x \Rightarrow \boxed{v_2 = \ln x}$$

لذا جواب خصوصی چنین است :

$$y_p = -x e^x + (\ln x) x e^x = -x e^x + x \ln x\, e^x$$

جواب عمومی چنین است :

$$y = y_h + y_p = c_1 e^x + c_2 x e^x - x e^x + x \ln x\, e^x$$

مثال: جواب عمومی معادله زیر را پیدا کنید:

$$y'' - 3y' + 2y = \frac{e^{3x}}{e^{2x}+1}$$

معادله همگن نظیر: $y'' - 3y' + 2y = 0$

معادله مشخصه: $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 2 \end{cases}$

پس جواب عمومی بصورت $y_h = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x}$

$y_p = v_1 e^{x} + v_2 e^{2x}$

$$\begin{cases} y_1 = e^{x} \\ y_2 = e^{2x} \\ f(x) = \dfrac{e^{3x}}{e^{2x}+1} \end{cases} \qquad W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{x} & e^{2x} \\ e^{x} & 2e^{2x} \end{vmatrix} = 2e^{3x} - e^{3x} = e^{3x} \Rightarrow W(y_1, y_2) = e^{3x}$$

$$v_1' = \frac{-y_2 f(x)}{W(y_1, y_2)} = \frac{-e^{2x} \cdot \dfrac{e^{3x}}{e^{2x}+1}}{e^{3x}} = -\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}$$

$$v_2' = \frac{y_1 f(x)}{W(y_1, y_2)} = \frac{e^{x} \cdot \dfrac{e^{3x}}{e^{2x}+1}}{e^{3x}} = \frac{e^{x}}{e^{2x}+1}$$

$$v_1 = \int -\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}\,dx \quad \frac{e^{2x} = u}{2e^{2x}dx = du} \quad \int -\frac{du}{2(u+1)} = -\frac{1}{2} \operatorname{Ln}(u+1) \overset{u = e^{2x}}{=}$$

$$-\frac{1}{2} \operatorname{Ln}(e^{2x}+1)$$

$$v_2 = \int \frac{e^{x}}{e^{2x}+1}\,dx \quad \frac{e^{x} = u}{e^{x}dx = du} \quad \int \frac{du}{u^2+1} = \operatorname{Arc\,Tan} u = \operatorname{Arc\,Tan}(e^{x})$$

$v_1 = -\frac{1}{2} Ln(e^{2x}+1)$, $v_2 = Arc\ Tan\ e^{x}$

لذا جواب خصوصی چنین است:

$$y_p = \left[-\frac{1}{2} Ln(e^{2x}+1)\right] e^{x} + \left[Arc\ Tan\ e^{x}\right] e^{2x}$$

و جواب عمومی معادله عبارت است از:

$$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x} - \left(\frac{1}{2} Ln(e^{2x}+1)\right)e^{x} + \left(Arc\ Tan\ e^{x}\right) e^{2x}$$

مثال: جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{x^2}$ را تعیین کنید.

معادله همگن متناظر: $y'' + 4y' + 4y = 0$

معادله مشخصه: $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0 \Rightarrow (\lambda+2)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -2$

پس جواب عمومی بصورت زیر است:

$$y_h = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x}$$

$$\Rightarrow y_p = v_1 e^{-2x} + v_2 x e^{-2x} \Rightarrow y_1(x) = e^{-2x} , y_2(x) = x e^{-2x}$$

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{-2x} & x e^{-2x} \\ -2e^{-2x} & e^{-2x} - 2x e^{-2x} \end{vmatrix} =$$

$$e^{-2x}(e^{-2x} - 2x e^{-2x}) - (-2e^{-2x})(x e^{-2x}) = e^{-4x} - 2x e^{-4x} + 2x e^{-4x} = e^{-4x}$$

$$v_1'(x) = \frac{-y_2 f(x)}{W(y_1, y_2)} = \frac{-x e^{-2x} \cdot \frac{e^{-2x}}{x^2}}{e^{-4x}} = -\frac{\frac{e^{-4x}}{x}}{e^{-4x}} = -\frac{1}{x}$$

$$v_2'(x) = \frac{y_1 f(x)}{W(y_1, y_2)} = \frac{e^{-2x} \cdot \frac{e^{-2x}}{x^2}}{e^{-4x}} = \frac{\frac{e^{-4x}}{x^2}}{e^{-4x}} = \frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow v_1'(x) = -\frac{1}{x} , v_2'(x) = \frac{1}{x^2}$$

$v_1(x) = \int v_1'(x)\,dx = \int -\frac{1}{x}\,dx = -\operatorname{Ln} x$

$v_2(x) = \int v_2'(x)\,dx = \int \frac{1}{x^2}\,dx = \int x^{-2}\,dx = -x^{-1} = -\frac{1}{x}$

جواب خصوصی: $y_p = v_1 e^{-2x} + v_2 x e^{-2x} \Rightarrow$

$y_p = (-\operatorname{Ln} x) e^{-2x} - \frac{1}{x} \cdot x e^{-2x} = (-\operatorname{Ln} x - 1) e^{-2x}$

جواب عمومی:

$y = y_h + y_p = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x} - (\operatorname{Ln} x + 1) e^{-2x}$

مثال: جواب خصوصی $y'' + y = \sec x$ در $x = 0$ دارای چه مقداری است؟

معادله همگن: $y'' + y = 0$

معادله مشخصه: $\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = -1 \Rightarrow \lambda = \pm i$

جواب عمومی: $y_h = C_1 \sin x + C_2 \cos x$

$y_1(x) = \sin x \qquad y_2 = \cos x \qquad f(x) = \sec x = \frac{1}{\cos x}$

$y_p = v_1 \sin x + v_2 \cos x$

$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = -\sin^2 x - \cos^2 x = -(\sin^2 x + \cos^2 x) = -1$

$v_1'(x) = \frac{-y_2 f(x)}{W(y_1, y_2)} = \frac{-\cos x \cdot \sec x}{-1} = \frac{-\cos x \cdot \frac{1}{\cos x}}{-1} = 1$

$v_2'(x) = \frac{y_1 f(x)}{W(y_1, y_2)} = \frac{\sin x \cdot \frac{1}{\cos x}}{-1} = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\operatorname{Tan} x$

$$v_1(x) = \int v_1'(x)\,dx = \int dx = x$$

$$v_2(x) = \int v_2'(x)\,dx = \int -\tan x\,dx = \int \frac{-\sin x}{\cos x}\,dx \quad \frac{\cos x = u}{-\sin x\,dx = du}$$

$$\int \frac{du}{u} = \ln u = \ln(\cos x)$$

جواب خصوصی:

$$y_p = v_1 \sin x + v_2 \cos x = x\sin x + (\ln(\cos x)).\cos x$$

if $x = 0 \Rightarrow y_p = 0 \times \underbrace{(\sin(0))}_{0} + \underbrace{[\ln(\underbrace{\cos 0}_{1})]}_{0} \underbrace{\cos 0}_{1} = 0$

سری

سری‌های توانی:

در این بخش مفاهیم اساسی و تعاریف مورد نیاز برای حل معادلات خطی مرتبه دوم را به اختصار و بدون اثبات بیان می‌کنیم:

فرض کنید x و a_0 و a_1 و ... اعداد حقیقی ثابت هستند عبارت

$$\sum_{n=0}^{N} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1 (x-x_0) + a_2 (x-x_0)^2 + \cdots + a_N (x-x_0)^N$$

یک سری توانی متناهی (چند جمله‌ای) حول x_0 است. سری توانی (نامتناهی) حول x_0 عبارتست از

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1 (x-x_0) + a_2 (x-x_0)^2 + \cdots \qquad (1)$$

که بطور طبیعی می‌توان آنرا بصورت زیر تعریف کرد

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n (x-x_0)^n$$

اگر حد فوق موجود باشد سری (1) را همگرا و در غیر اینصورت آنرا واگرا گوئیم.

در حالت خاص سری توانی حول نقطه صفر عبارت است از:

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

سری (1) ممکن است برای $|x-x_0| = R$ همگرا و یا واگرا باشد و برای هر x که $|x-x_0| < R$ همگرای مطلق و برای هر x که $|x-x_0| > R$ واگرا است. R را شعاع همگرایی

سری (۱) گوییم. در واقع $(x_0-R$ و $x_0+R)$ بزرگترین فاصله بازی است که سری در آن همگرا است. $(0 \leqslant R \leqslant +\infty)$. اگر به ازای هر n بزرگ $a_n \neq 0$ آنگاه:

روش آزمون نسبت
$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

با این روش می‌توان شعاع همگرایی بسیاری از سری‌ها را بدست آورد.

مثال: شعاع همگرایی سری هندسی $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ را بدست آورید.

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-0)^n \Rightarrow \begin{cases} a_n = 1 \\ a_{n+1} = 1 \end{cases} \Rightarrow R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{1}\right| = 1$$

مثال: شعاع همگرایی سری $\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$ برابر است با:

$$a_n = n! \Rightarrow a_{n+1} = (n+1)!$$

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n!}{(n+1)!}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{n+1}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{\infty}\right| = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

یعنی این سری فقط در $x=0$ همگرا است.

* $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 1$
* $(n+1)! = (n+1)(n)(n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$

مثال: شعاع همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n} x^n$ را بیابید.

$$a_n = \frac{3^n}{n} \Rightarrow a_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{n+1}$$

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{3^n}{n}}{\frac{3^{n+1}}{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{3^n}{n} \cdot \frac{n+1}{3^{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n+1}{3n}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{3n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(1+\frac{1}{n})}{3n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3}(1+\frac{1}{n}) = \frac{1}{3}$$

یعنی $R = \frac{1}{3}$ شعاع همگرایی سری است. بنابراین سری برای $|x| < \frac{1}{3}$ همگرای مطلق و

برای $|x| > \frac{1}{3}$ واگرا است. می‌توان ثابت کرد سری برای $x = \frac{1}{3}$ واگرا و برای $x = -\frac{1}{3}$ همگرا است.

بنابراین سری در $[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ همگرا و در خارج از این فاصله واگرا است.

تعریف: شعاع و بازه سری‌های توانی را می‌توان از طریق آزمون‌های نسبت و ریشه بدست آورد.

آزمون نسبت : $R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$

آزمون ریشه : $R = \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$

بسط تیلور و بسط مک لورن:

بسط تیلور: بسط تیلور تابع $f(x)$ حول نقطه $x = x_0$ بصورت زیر نوشته می‌شود.

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

که در آن ضرایب این سری عبارتند از:

$$a_0 = f(x_0) \qquad a_1 = \frac{f'(x_0)}{1!} \qquad a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!} \quad \cdots \quad a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n \qquad (2)$$

- بسط تیلور حول نقطه $x_0 = 0$ را بسط مک لورن تابع می‌گویند.

تعریف: اگر سری توانی (2) به ازای هر x در یک بازه $(x_0 - R, x_0 + R)$ ، $R > 0$

همگرا به $f(x)$ باشد، آنگاه تابع f را در نقطه x_0 تحلیلی می‌نامیم و می‌توان نوشت

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \quad , \quad |x - x_0| < R$$

از این تعریف نتیجه می‌شود که هر تابع چند جمله‌ای در هر نقطه، تابعی است تحلیلی.

مثال: سری مک لورن تابع $f(x) = e^x$ را بیابید.

حل: به ازای هر n داریم $f^{(n)}(0) = 1$

$$f'(x) = e^x \Rightarrow f'(0) = e^0 = 1$$
$$f''(x) = e^x \Rightarrow f''(0) = e^0 = 1 \quad \ldots \quad f^{(n)}(0) = 1$$

لذا:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots$$

نقاط عادی و نقاط تکین:

تعریف: معادله خطی همگن مرتبه دوم به شکل زیر را در نظر بگیرید.

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \qquad (3)$$

نقطه x_0 را یک نقطه عادی معادله (3) می‌نامیم، هرگاه هر دو تابع $P(x)$ و $Q(x)$ در x_0 تحلیلی باشند. اگر حداقل یکی از توابع $P(x)$ و $Q(x)$ در x_0 تحلیلی نباشند، نقطه x_0 را یک نقطه تکین معادله (3) می‌نامیم.

در اغلب معادلات دیفرانسیل به شکل (3) که در کاربردها با آنها روبرو می‌شویم، توابع $p(x)$ و $Q(x)$ توابعی گویا می‌باشند. بنابراین، این توابع در هر نقطه بجز نقاطی که به ازای آنها مخرج صفر می‌شود، تحلیلی هستند. نقاطی که به ازای آنها مخرج صفر می‌شود، نقاط تکین معادله بوده و بقیه نقاط، نقاط عادی هستند.

مثال: در معادله $y'' + \frac{1}{2x+1} y' + \frac{2}{2x+1} y = 0$ نقاط تکین و عادی را مشخص کنید.

$$p(x) = \frac{1}{2x+1}$$

$$\xrightarrow{\text{توابع } Q \text{ و } P \text{ گویا}} \quad 2x+1=0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \quad \text{نقطه تکین}$$

$$Q(x) = \frac{2}{2x+1}$$

و هر نقطه دیگر نقطه عادی معادله است.

مثال: معادله زیر را در نظر بگیرید:

$$x^2 y'' + 2x y' - 2y = 0 \Rightarrow y'' + \frac{2}{x} y' - \frac{2}{x^2} y = 0$$

$$p(x) = \frac{2}{x}$$

$$\xrightarrow{\text{گویا } Q \text{ و } P} \quad x = 0 \quad \text{نقطه تکین (غیرعادی)}$$

$$Q(x) = -\frac{2}{x^2}$$

تعریف: نقطه x_0 را یک نقطه تکین منظم معادله (3) می‌نامیم، هرگاه x_0 یک نقطه تکین معادله بوده و دو تابع:

$$(x-x_0)\, p(x) \qquad (x-x_0)^2\, Q(x) \qquad (9)$$

در x_0 تحلیلی باشند. اگر حداقل یکی از دو تابع در (9) در x_0 تحلیلی نباشند

آنگاه x_0 یک نقطهٔ تکین نامنظم معادله (3) نامیده می‌شود.

نقاط عادی و غیرعادی (تکین) از نوع منظم و یا نامنظم معادله $y'' + p(x) y' + Q(x) y = 0$ عبارتند از:

1. نقطهٔ عادی: نقطهٔ $x = x_0$ یک نقطهٔ عادی است اگر هر دو حد $\lim\limits_{x \to x_0} p(x)$ و $\lim\limits_{x \to x_0} Q(x)$ موجود باشد.

2. نقطهٔ غیرعادی (تکین): نقطهٔ $x = x_0$ یک نقطهٔ غیرعادی (تکین یا منفرد) است اگر حداقل یکی از دو حد $\lim\limits_{x \to x_0} p(x)$ و $\lim\limits_{x \to x_0} Q(x)$ موجود نباشد.

3. نقطهٔ تکین منظم: نقطهٔ غیرعادی $x = x_0$، یک نقطهٔ غیرعادی منظم است اگر هر دو حد $\lim\limits_{x \to x_0} (x - x_0) p(x)$ و $\lim\limits_{x \to x_0} (x - x_0)^2 Q(x)$ موجود باشد.

4. نقطهٔ تکین نامنظم: نقطهٔ غیرعادی (تکین) $x = x_0$ را یک نقطهٔ غیرعادی نامنظم است اگر حداقل یکی از دو حد $\lim\limits_{x \to x_0} (x - x_0) p(x)$ و $\lim\limits_{x \to x_0} (x - x_0)^2 Q(x)$ موجود نباشد.

مثال: در معادله لژاندر:

$$(1 - x^2) y'' - 2x y' + p(p+1) y = 0$$

داریم:

$$y'' - \frac{2x}{1 - x^2} y' + \frac{p(p+1)}{1 - x^2} y = 0 \quad \Rightarrow$$

$$p(x) = -\frac{2x}{1 - x^2} \quad , \quad Q(x) = \frac{p(p+1)}{1 - x^2}$$

$1-x^2=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$

نقاط $x=1$ و $x=-1$ نقاط تکین اند. در نقطه $x=1$ توابع

① $(x-x_0)\cdot p(x)=(x-1)\,p(x)=(x-1)\cdot\dfrac{-2x}{1-x^2}=\dfrac{(-2x)(x-1)}{(1-x)(1+x)}=$

$\dfrac{2x\,\cancel{(1-x)}}{\cancel{(1-x)}(1+x)}=\dfrac{2x}{x+1}$

$(x-1)^2=(1-x)^2$

② $(x-x_0)^2\,Q(x)=(x-1)^2\cdot\dfrac{p(p+1)}{1-x^2}=\dfrac{-(1-x)(x-1)\,p(p+1)}{(1-x)\,(1+x)}=$

$\dfrac{(1-x)\,p(p+1)}{1+x}$

هر دو تحلیلی هستند پس نقطه تکین منظم است. (هر دو حد وجود دارد).

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x}{x+1}=1 \qquad \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1-x)\,p(p+1)}{x+1}=0$

نقطه $x=-1$ را در نظر میگیریم:

① $(x-x_0)\,p(x)=(x+1)\,\dfrac{-2x}{1-x^2}=\dfrac{-2x}{1-x}$

② $(x-x_0)^2\,Q(x)=(x+1)^2\cdot\dfrac{p(p+1)}{(1-x)^2}=\dfrac{(x+1)\,p(p+1)}{1-x}$

$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{-2x}{1-x}=\dfrac{2}{2}=1 \quad,\ \lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+1)\,p(p+1)}{1-x}=0$

هر دو حد وجود دارند پس $x=-1$ نیز تکین منظم است.

مثال: نقاط عادی، نقاط تکین منظم و نقاط تکین نامنظم معادله زیر را مشخص کنید.

$x^2(x-1)y''+(2x+1)y'+x^2(x+1)y=0$

Subject: Date:

$$y'' + \frac{2x+1}{x^2(x-1)}y' + \frac{x^2(x+1)}{x^2(x-1)}y = 0$$

$$p(x) = \frac{2x+1}{x^2(x-1)}$$

$$\Longrightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$Q(x) = \frac{x+1}{x-1} \qquad x-1=0 \Rightarrow x=1$$

} $x=1$ و $x=0$ نقاط تکین

هر نقطه بجز نقاط $x=0$ و $x=1$ نقاط عادی معادله هستند.

در نقطه $x=0$

$$(x-x_0)\,p(x) = x\cdot\frac{2x+1}{x^2(x-1)} = \frac{2x+1}{x(x-1)} \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{2x+1}{x(x-1)} = \frac{1}{0} = \infty$$

$$(x-x_0)^2 Q(x) = x^2\cdot\frac{x+1}{x-1} = \frac{x^2(x+1)}{x-1} \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{x^2(x+1)}{x-1} = 0$$

$xp(x)$ در $x=0$ تحلیلی نیست و همچنین حد آن نیز وجود ندارد لذا $x=0$ تکین نامنظم است

در نقطه $x=1$:

$$(x-x_0)\,p(x) = (x-1)\cdot\frac{2x+1}{x^2(x-1)} = \frac{2x+1}{x^2} \Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{2x+1}{x^2} = 3$$

$$(x-x_0)^2 Q(x) = (x-1)^2\cdot\frac{x+1}{x-1} = (x-1)(x+1) = x^2-1 \Rightarrow \lim_{x\to 1} x^2-1 = 0$$

مثال: معادله دیفرانسیل زیر را درنظر بگیرید و نوع نقطه $x=0$ را برای آن تعیین کنید.

$$x^2y'' + (e^x-1)y' + (\sin^2 x)y = 0 \Rightarrow y'' + \frac{e^x-1}{x^2}y' + \frac{\sin^2 x}{x^2}y = 0$$

$$p(x) = \frac{e^x-1}{x^2}, \qquad Q(x) = \frac{\sin^2 x}{x^2} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow x=0$$

$x=0$ نقطه تکین است.

$$(x-x_0)\,p(x) = x\cdot\frac{e^x-1}{x^2} = \frac{e^x-1}{x}$$

$$(x-x_0)^2 Q(x) = x^2\cdot\frac{\sin^2 x}{x^2} = \cancel{x}\sin^2 x$$

DATA

Subject: Date:

① $\lim_{x\to 0} (x-0)\, p(x) = \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = \frac{0}{0}$ مبهم $\Rightarrow$

$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} \overset{\text{هوپیتال}}{=\!=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = \lim_{x\to 0} e^x = e^0 = 1$

② $\lim_{x\to x_0} (x-x_0)^2 Q(x) = \lim_{x\to 0} x \sin^2 x = 0$

پس هر دو حد وجود دارند لذا $x=0$ یک نقطه غیرعادی از نوع منظم است.

* اگر f و g در x_0 تحلیلی باشند، آنگاه $f\pm g$ و $f.g$ نیز در x_0 تحلیلی هستند. همچنین $\frac{f}{g}$ به شرط آنکه $g(x_0)\neq 0$ در x_0 تحلیلی است.

حل معادلات دیفرانسیل به کمک سری توانی

قضیه: معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید:

$y'' + p(x) y' + Q(x) y = 0$

چنانچه x_0 یک نقطه عادی برای این معادله دیفرانسیل باشد، جواب این معادله دیفرانسیل را می‌توان برحسب یک سری توانی حول نقطه x_0 از جنس بسط تیلور بصورت زیر نوشت:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \quad , \quad a_n = \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}$$

می‌توان نشان داد شعاع همگرایی این جواب برابر با مینیمم فاصله نقطه x_0 تا نقاط تکین معادله دیفرانسیل مذکور (خواه این نقاط تکین از نوع حقیقی باشند یا مختلط) می‌باشد.

DATA

مثال: هرگاه $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ جواب بصورت سری توانی برای $y''+xy=0$

با $y(0)=1$ و $y'(0)=1$ باشد آنگاه ضریب a_3 را بیابید.

با توجه به فرمول گفته شده در صفحه‌ی قبل

$$a_n=\frac{y^{(n)}(x_0)}{n!} \Rightarrow a_3=\frac{y^{(3)}(x_0)}{3!}=\frac{y^{(3)}(0)}{3!}$$

لذا برای محاسبه $y'''(0)$ باید از معادله فوق یکبار مشتق بگیریم:

$$y''+xy=0 \xrightarrow{\text{مشتق}} y'''+xy'+y=0 \Rightarrow y'''(0)+0\cdot y'(0)+y(0)=0$$

$$\Rightarrow y'''(0)=-y(0) \Rightarrow y'''(0)=-1$$

$$\Rightarrow a_3=\frac{y^{(3)}(0)}{3!}=\frac{-1}{3!}=\frac{-1}{6}$$

مثال: معادله دیفرانسیل زیر را درنظر بگیرید. چنانچه جواب این معادله دیفرانسیل را

صورت $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ درنظر بگیریم، ضرایب a_2 و a_3 را پیدا کنید.

$$\begin{cases} y''+e^x y'+xy=x+1 \\ y(0)=1 \quad , \quad y'(0)=2 \end{cases}$$

$x=0 \quad y=1 \quad y'=2$

اگر به معادله داده شده در $x=0$ نگاه کنیم آنگاه $y''(0)$ بدست می‌آید که از روی آن می‌توانیم

a_2 را پیدا کنیم

$$y''(0)+e^0 y'(0)+(0)(y(0))=0+1 \Rightarrow y''(0)+2=1 \Rightarrow y''(0)=-1$$

$$a_2=\frac{y^{(2)}(0)}{2!}=\frac{y''(0)}{2!}=\frac{-1}{2} \Rightarrow a_2=-\frac{1}{2}$$

برای بدست آوردن ضریب a_3 باید $y^{(3)}(0) = y'''(0)$ را بدست آوریم پس

از معادله داده شده مشتق می‌گیریم تا $y^{(3)}$ را بدست آوریم.

$$y'' + e^x y' + xy = x+1 \xrightarrow{\text{مشتق}} y''' + e^x y' + e^x y'' + y + xy' = 1$$

$$\Rightarrow y^{(3)}(0) + e^0 y'(0) + e^0 y''(0) + y(0) + 0 \times y'(0) = 1 \Rightarrow$$

$$y^{(3)}(0) + 2 - 1 + 1 + 0 = 1 \Rightarrow y^{(3)}(0) = -1$$

$$a_3 = \frac{y'''(0)}{3!} = \frac{-1}{6} \Rightarrow a_3 = -\frac{1}{6}$$

مثال: جواب معادله $y'' + (x-1)y' + y = 0$ را بصورت یک سری توانی

از x بدست آورید بطوریکه در شرایط $y(0)=0$ و $y'(0)=1$ صدق کند.

حل، منظور یافتن جواب در مجاورت نقطه $x_0 = 0$ است. با توجه به اینکه

$p(x) = x-1$ و $Q(x) = 1$ در $x=0$ تحلیلی هستند، معادله دارای جوابی بصورت زیر است.

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

داریم:

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad , \quad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

با جانشین کردن y و y' و y'' در معادله داریم:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + (x-1)\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

یا

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n-\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0$$

یا

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^n-\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0$$

یا

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left((n+2)(n+1)a_{n+2}-(n+1)a_{n+1}+(n+1)a_n\right)x^n=0$$

از اینجا نتیجه می‌شود که

$$(n+2)(n+1)a_{n+2}-(n+1)a_{n+1}+(n+1)a_n=0 \qquad n=0,1,2,\dots$$

$$\Rightarrow (n+2)a_{n+2}-a_{n+1}+a_n=0 \quad (*)$$

ملاحظه می‌کنید در اینجا فرمول بازگشتی سه جمله‌ای است یعنی شامل a_n، a_{n+1} و a_{n+2} می‌باشد. داریم:

$$(*) \Rightarrow a_{n+2}=\frac{a_{n+1}-a_n}{n+2} \qquad n=0,1,\dots$$

ابتدا از شرط اولیه، دو ضریب a_0 و a_1 را بدست می‌آوریم. داریم:

$$y(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots \Rightarrow y(0)=0=a_0+(a_1\times 0)+(a_2\times 0)+\dots \Rightarrow a_0=0$$

$$y'(x)=a_1+2a_2x+\dots \Rightarrow y'(0)=1=a_1+(2a_2\times 0)+\dots \Rightarrow a_1=1$$

از شرط $y(0)=0$ نتیجه می‌شود $a_0=0$ و از شرط $y'(0)=1$ خواهیم داشت $a_1=1$.

بنابراین:

$$a_{n+2}=\frac{a_{n+1}-a_n}{n+2} \Rightarrow a_2=\frac{a_1-a_0}{2}=\frac{1-0}{2}=\frac{1}{2}$$

$$a_3=\frac{a_2-a_1}{3}=\frac{\frac{1}{2}-1}{3}=-\frac{1}{6}$$

$$a_4 = \frac{a_3 - a_2}{4} = \frac{-\frac{1}{6} - \frac{1}{2}}{4} = \frac{-\frac{4}{6}}{4} = -\frac{1}{6}$$

$$a_5 = \frac{a_4 - a_3}{5} = \frac{-\frac{1}{6} + \frac{1}{6}}{5} = 0$$

$\vdots$

توجه کنید که ضرایب از قانون معینی پیروی نمی کنند پس جواب معادله بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$y = x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + \cdots$$

مثال: معادله دیفرانسیل زیر مفروض است چنانچه جواب این معادله دیفرانسیل را بصورت $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ درنظر بگیریم رابطه بازگشتی و مربوط به a_n ها را پیدا کنید.

$$y'' + x^2 y = 0$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \rightarrow y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \rightarrow y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

این مقادیر را در معادله دیفرانسیل قرار می‌دهیم:

$$y'' + x^2 y = 0 \rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

قدم اول آن است که توان x ها را در تمام سیگماها یکسان کنیم

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} = 0$$

یعنی توان x ها یا $(n-2)$ باشد یا $(n+2)$

$(n+2 = N-2 \Rightarrow n = N-4)$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{N=4}^{\infty} a_{N-4} x^{N-2} = 0 \Rightarrow$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=4}^{\infty} a_{n-4} x^{n-2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2a_2 x^0 + 6a_3 x^1 + \sum_{n=4}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=4}^{\infty} a_{n-4} x^{n-2} = 0$$

$$\Rightarrow 2a_2 + 6a_3 x + \sum_{n=4}^{\infty} \left(n(n-1)a_n + a_{n-4}\right) x^{n-2} = 0$$

پس باید تمام ضرایب توان های مختلف x متحد با صفر باشند:

$2a_2 = 0 \Rightarrow a_2 = 0$

$6a_3 = 0 \Rightarrow a_3 = 0$

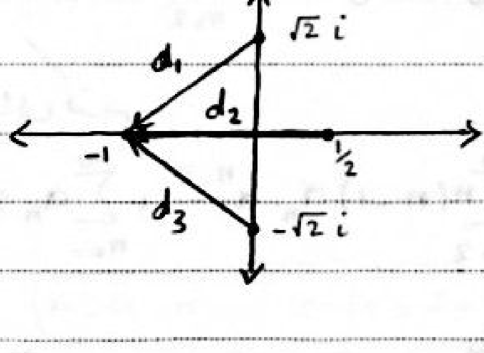
$n(n-1)a_n + a_{n-4} = 0 \Rightarrow a_n = -\dfrac{a_{n-4}}{n(n-1)}$: رابطه بازگشتی

مثال: معادله دیفرانسیل زیر موجود است چنانچه جواب این معادله دیفرانسیل را بصورت $y = \sum_{n=0}^{\infty} (x+1)^n$ درنظر بگیریم. شعاع همگرایی سری جواب چگونه خواهد بود؟

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)(x^2+2)y'' + y' + 4y = 0$$

بدیهی است جواب بصورت سری توانی حول نقطه $x_0 = -1$ مد نظر است. نقاط غیرعادی معادله عبارتند از:

$$y'' + \underbrace{\frac{1}{(x-\frac{1}{2})(x^2+2)}}_{P(x)} y' + \underbrace{\frac{4}{(x-\frac{1}{2})(x^2+2)}}_{Q(x)} y = 0$$



$$\Rightarrow \begin{cases} x - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \\ x^2 + 2 = 0 \Rightarrow x^2 = -2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}\,i \end{cases}$$

$d_1 = d_3 = \sqrt{(-1)^2 + (\mp\sqrt{2}\,i)^2} = \sqrt{1+2} = \sqrt{3}$, $d_2 = \frac{3}{2}$

شعاع همگرایی $R = \min\{d_1, d_2, d_3\} = \min\{\sqrt{3}, \frac{3}{2}\} \Rightarrow R = \frac{3}{2}$

DATA

مثال: معادله دیفرانسیل زیر مفروض است در بسط مک لورن جواب معادله دیفرانسیل ضریب x^2 کدام است.

$$\begin{cases} y'+e^{y}=x \\ y(0)=1 \end{cases}$$

$$x^2 \text{ ضریب } = a_2 = \frac{y''(x_0)}{2!} = \frac{y''(0)}{2!}$$

برای پیدا کردن a_2 نیاز است $y''(0)$ را داشته باشیم و برای پیدا کردن مقدار $y''(0)$ باید ابتدا از صورت سؤال $y'(0)$ را یافته و بعد از معادله فوق مشتق بگیریم:

$$y'+e^{y}=x \xrightarrow{x=0} y'(0)+e^{y(0)}=0 \Rightarrow y'(0)+e=0 \Rightarrow y'(0)=-e$$

$$y'+e^{y}=x \xrightarrow{\text{مشتق}} y''+y'e^{y}=1 \xrightarrow{x=0} y''(0)+y'(0)e^{y(0)}=1 \Rightarrow$$

$$y''(0)+(-e)e^{1}=1 \Rightarrow y''(0)-e^2=1 \Rightarrow y''(0)=1+e^2$$

$$\Rightarrow a_2=\frac{y''(0)}{2!}=\frac{1+e^2}{2}$$

حل معادلات دیفرانسیل به روش فروبنیوس (روش سری‌های توانی اصلاح شده):

معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید:

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=0$$

چنانچه x_0 یک نقطه منفرد (غیرعادی) از نوع منظم برای این معادله دیفرانسیل باشد و بخواهیم جواب معادله را بصورت سری توانی حول x_0 بنویسیم باید از روش فروبنیوس استفاده کنیم، برای این منظور معادله مشخصه‌ای بصورت زیر تشکیل می‌دهیم:

$$r^2+(A-1)r+B=0$$

که در آن:

$$A=\lim_{x\to x_0}(x-x_0)P(x)$$

$$B=\lim_{x\to x_0}(x-x_0)^2Q(x)$$

پس از یافتن ریشه‌های معادله مشخصه می‌توان نشان داد پایه‌های جواب بصورت سری توانی حول نقطه x_0 بر فرم زیر قابل بیان است:

حالت اول: اگر معادله مشخصه دارای دو ریشه r_1 و r_2 باشد و تفاضل r_1 و r_2 عدد صحیح نباشد خواهیم داشت:

$$y_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^{n+r_1}$$

$$y_2(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n(x-x_0)^{n+r_2}$$

حالت دوم: اگر معادله مشخصه دارای دو ریشه r_1 و r_2 باشد و تفاضل r_1 و r_2 عددی صحیح باشد داریم: $(r_1>r_2)$

$$y_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^{n+r_1}$$

$$y_2(x)=Ky_1\ln(x-x_0)+\sum_{n=0}^{\infty}b_n(x-x_0)^{n+r_2}$$

حالت سوم: اگر معادله مشخصه دارای ریشه مضاعف $r_1=r_2=r$ باشد داریم:

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^{n+r}$$

$$y_2(x) = y_1 \, Ln(x-x_0) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^{n+r}$$

در موارد فوق a_n ، b_n و k پس از قرار دادن این جواب ها در معادله مشخص می‌شوند.

مثال: معادله دیفرانسیل $x^2y'' + (e^{2x}-1)\, y' - 2y = 0$ مفروض است. چنانچه

بخواهیم جواب این معادله دیفرانسیل را به فرم سری توانی حول نقطه $x=0$ بنویسیم،

ریشه‌های معادله مشخصه به روش فروبنیوس کدام است؟

حل:

$$y'' + \frac{e^{2x}-1}{x^2} y' - \frac{2}{x^2} y = 0 \Rightarrow p(x) = \frac{e^{2x}-1}{x^2} \qquad Q(x) = -\frac{2}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 0} p(x) = \lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{x^2} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{هوپیتال}} \lim_{x\to 0} \frac{2e^{2x}}{2x} = \frac{1}{0} = \infty$$

$$\lim_{x\to 0} Q(x) = \lim_{x\to 0} \frac{-2}{x^2} = \frac{-2}{0} = -\infty$$

بدیهی است نقطه $x=0$ از نوع غیرعادی است. (یا: تکین $x=0$ $\Leftarrow$ $x^2=0$)

حال منظم یا نامنظم بودن آنرا بررسی می‌کنیم:

$$\lim_{x\to x_0} (x-x_0)\, p(x) = \lim_{x\to 0} x \frac{e^{2x}-1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{x} = \frac{0}{0} \quad \text{مبهم}$$

$$\xrightarrow{\text{هوپیتال}} \lim_{x\to 0} \frac{2e^{2x}}{1} = 2$$

$$\lim_{x \to x_0} (x-x_0)^2 Q(x) = \lim_{x \to 0} x^2 \cdot \frac{-2}{x^2} = -2$$

پس $x=0$ از نوع تکین منظم است. پس برای حل معادله فوق می‌توانیم از روش فروبنیوس

استفاده کنیم پس معادله مشخصه را تشکیل می‌دهیم

$$A = \lim_{x \to x_0} (x-x_0) p(x) = \lim_{x \to 0} x\, p(x) = 2$$

$$B = \lim_{x \to x_0} (x-x_0)^2 Q(x) = \lim_{x \to 0} x^2 Q(x) = -2$$

معادله مشخصه : $r^2 + (A-1)r + B = 0 \Rightarrow r^2 + (2-1)r - 2 = 0 \Rightarrow r^2 + r - 2 = 0$

$$\Rightarrow r_1 = -2 \quad , \quad r = 1$$

اگر بخواهیم جواب را بصورت سری توانی حول $x_0 = 0$ بنویسیم از آنجا که تفاضل دو

ریشه عدد صحیح می‌باشد داریم: $r_1 > r_2 \Rightarrow r_1 = 1 \quad r_2 = -2$

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^{n+r_1} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}$$

$$y_2(x) = K y_1 \ln(x-x_0) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^{n+r_2} = K y_1 \ln x + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n-2}$$

مثال: ساختار پایه‌های جواب معادله دیفرانسیل زیر بصورت سری توانی حول نقطه

$x=0$ چگونه خواهد بود؟

$$x^2 y'' - \frac{\sin 2x}{3} y' + (x^2+3x) y = 0 \Rightarrow y'' - \frac{\sin 2x}{3x^2} y' + \frac{x^2+3x}{x^2} y = 0$$

حل :

$$P(x) = \frac{-\sin 2x}{3x^2}$$

$$Q(x) = \frac{x^2+3x}{x^2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x^2 = 0 \\ x^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0$$ نقطه تکین

$$1.\ \lim_{x\to 0} x\,P(x) = \lim_{x\to 0} x \cdot \frac{-\sin 2x}{3x^2} = \lim_{x\to 0} -\frac{\sin 2x}{3x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{هوپیتال}}$$

$$\lim_{x\to 0} -\frac{\sin 2x}{3x} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-2\cos 2x}{3} = -\frac{2}{3} = A$$

$$2.\ \lim_{x\to 0} x^2 Q(x) = \lim_{x\to 0} x^2 \cdot \frac{x^2+3x}{x^2} = \lim_{x\to 0} x^2+3x = 0 = B$$

پس $x=0$ نقطه تکین منظم است.

معادله مشخصه : $r^2+(A-1)r+B=0 \Rightarrow r^2+(-\frac{2}{3}-1)r+0=0 \Rightarrow$

$$r^2-\frac{5}{3}r=0 \Rightarrow r(r-\frac{5}{3})=0 \Rightarrow r=0 \ ,\ r=\frac{5}{3}$$

تفاضل دو ریشه عدد صحیح نمی باشد لذا خواهیم داشت :

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^{n+r_1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\frac{5}{3}} \qquad r_1 = \frac{5}{3}$$

$$y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^{n+r_2} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n} \qquad r_2 = 0$$

مثال ، برای معادله دیفرانسیل $2x^2y''+(-x)y'+(x+1)y=0$ فرم پایه‌های

جواب بصورت سری توانی حول نقطه $x=0$ چگونه است.

$$2x^2y''-xy'+(x+1)y=0 \Rightarrow y''-\frac{x}{2x^2}y'+\frac{x+1}{2x^2}y=0$$

Subject: Date:

$$y'' - \frac{1}{2x} y' + \frac{x+1}{2x^2} y = 0$$

$P(x) = -\frac{1}{2x}$, $Q(x) = \frac{x+1}{2x^2}$ $\Rightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ 2x^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0$ نقطه تکین

$$\lim_{x \to x_0} (x - x_0) \cdot P(x) = \lim_{x \to 0} x \cdot -\frac{1}{2x} = -\frac{1}{2} = A$$

$$\lim_{x \to x_0} (x - x_0)^2 \cdot Q(x) = \lim_{x \to 0} x^2 \cdot \frac{x+1}{2x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{x+1}{2} = \frac{1}{2} = B$$

معادله مشخصه : $r^2 + (A-1)r + B = 0 \Rightarrow r^2 + (-\frac{1}{2} - 1) r + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow$

$$r^2 - \frac{3}{2} r + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow (r-1)(r - \frac{1}{2}) = 0 \Rightarrow r = 1 \quad , r = \frac{1}{2}$$

از آنجا که تفاضل دو ریشه عددی صحیح نمی باشد لذا خواهیم داشت :

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^{n+r_1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}$$

$$y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^{n+r_2} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+\frac{1}{2}}$$

مثال ، دو جواب مستقل معادله دیفرانسیل $x > 0$ ، $x^2 y'' + 3xy' + (1+x) y = 0$ به کدام صورت است

$$x^2 y'' + 3xy' + (1+x) y = 0 \Rightarrow y'' + \frac{3x}{x^2} y' + \frac{1+x}{x^2} y = 0 \Rightarrow$$

$$y'' + \frac{3}{x} y' + \frac{1+x}{x^2} y = 0 \quad \Rightarrow P(x) = \frac{3}{x} \qquad Q(x) = \frac{1+x}{x^2}$$

DATA

Subject: Date:

$\Rightarrow x=0$ نقطه تکین

$$\lim_{x\to x_0}(x-x_0)p(x)=\lim_{x\to 0} x\cdot\frac{3}{x}=3=A$$

$$\lim_{x\to x_0}(x-x_0)^2Q(x)=\lim_{x\to 0} x^2\cdot\frac{1+x}{x^2}=\lim_{x\to 0}1+x=1=B$$

$x=0$ نقطه تکین منظم است

معادله مشخصه : $r^2+(A-1)r+B=0 \Rightarrow r^2+2r+1=0 \Rightarrow (r+1)^2=0 \Rightarrow$

معادله مشخصه دارای ریشه‌ی مضاعف است. $r=r_1=r_2=-1$

$$y_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^{n+r}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n-1}$$

$$y_2(x)=y_1\operatorname{Ln}(x-x_0)+\sum_{n=0}^{\infty}b_n(x-x_0)^{n+r}=y_1\operatorname{Ln}x+\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^{n-1}$$

DATA

معادله دیفرانسیل لژاندر :

یک معادله دیفرانسیل لژاندر به فرم زیر نوشته می‌شود:

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + m(m+1)y = 0$$

طبیعی است $x_0 = 0$ برای این معادله دیفرانسیل یک نقطه عادی است و چنانچه جواب

این معادله را بصورت $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ بنویسیم به جوابی به فرم زیر خواهیم رسید:

$$y = a_0 \underbrace{\left[\text{سری توانی نامتناهی شامل توانهای زوج}\right]}_{h_m(x)} + a_1 \underbrace{\left[\text{سری توانی نامتناهی شامل توانهای فرد}\right]}_{q_m(x)}$$

$$y = a_0 h_m(x) + a_1 q_m(x)$$

اما آنچه اهمیت دارد تعیین m است. زیرا فرم جواب بستگی به مقدار m دارد.

حالت اول: برای m های غیرصحیح هر دو پایه جواب دارای تعداد جملات نامتناهی هستند.

حالت دوم، اگر m زوج باشد پایه $h_m(x)$ تبدیل به یک چند جمله‌ای از درجه m با

تعداد جملات محدود می‌شود و تعداد جملات با توان فرد نامحدود است. ($q_m(x)$ سری

نامتناهی باقی می‌ماند).

حالت سوم: اگر m فرد باشد پایه $q_m(x)$ تبدیل به یک چند جمله‌ای از درجه m با تعداد

جملات محدود می‌شود و تعداد جملات با توان زوج نامحدود است. ($h_m(x)$ سری نامتناهی باقی می‌ماند)

نکته: در حالت دوم و سوم به آن پایه از جواب که دارای تعداد جملات محدود

است چندجمله‌ای لژاندر می‌گوییم و آنرا با $P_n(x)$ نمایش می‌دهیم.

نکته: بدیهی است تمام چندجمله‌ایهای زوج لژاندر توابعی زوج و تمام چندجمله‌ایهای

فرد لژاندر توابعی فرد هستند.

نکته: در مورد چندجمله‌ایهای لژاندر $P_n(x)$ روابط زیر صادق است.

۱. خاصیت تعامد چندجمله‌ای لژاندر:

$$\int_{-1}^{1} P_m(x) P_n(x)\, dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \dfrac{2}{2m+1} & m = n \end{cases}$$

2. $P_m(1) = 1$

3. $P_m(-1) = (-1)^m$

۴. $P_m(-x) = (-1)^m P_m(x)$

5. چندجمله‌ایهای لژاندر در معادله بازگشتی زیر صدق می‌کنند:

$$(m+1) P_{m+1}(x) = (2m+1) x P_m(x) - m P_{m-1}(x) \qquad m = 1, 2, \dots$$

از این فرمول با داشتن $P_0(x) = 1$ و $P_1(x) = x$ می‌توان همه چندجمله‌ایهای

لژاندر را بدست آورد.

قضیه: اگر تابع $f(x)$ در شرایط قضیه دیریکله در بازه $(-1,1)$ صدق کند [در فاصله $-1<x<1$ پیوسته تکه‌ای بوده و در هر نقطه از این بازه مشتق چپ و راست داشته باشد] آنگاه در هر نقطه پیوستگی تابع $f(x)$ در بازه $(-1,1)$ داریم:

$$f(x)=\sum_{m=0}^{\infty} c_m P_m \quad ; \quad c_m=\frac{2m+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)\cdot P_m(x)\,dx$$

و در هر نقطه ناپیوستگی تابع سری فوق به $\frac{[f(x^+)+f(x^-)]}{2}$ همگرا خواهد بود.

مثال: جواب عمومی معادلات زیر را بیابید.

1) $(1-x^2)y''-2xy'+30y=0$

حل: ابتدا باید m معادله را بدست آوریم تا از روی آن جواب را تشخیص دهیم:

$$\left.\begin{array}{r}(1-x^2)y''-2xy'+30y=0 \Rightarrow (1-x^2)y''-2xy'+5(5+1)y=0\\ \text{معادله لژاندر}: \ (1-x^2)y''-2xy'+m(m+1)y=0\end{array}\right\} \Rightarrow m=5$$

پس با توجه به مقدار m که عددی فرد است جواب معادله لژاندر بالا از حالت سوم پیروی می‌کند:

$$m=5 \Rightarrow \begin{cases} h_m(x)= \text{یک سری نامتناهی شامل توان‌های زوج} \\ \\ q_m(x)= \text{یک چندجمله‌ای درجه پنجم شامل توانهای فرد} = P_5(x) \end{cases}$$

2) $(1-x^2)y'-2xy'+\frac{3}{4}y=0$

$$(1-x^2)y''-2xy'+\frac{3}{4}y=0 \Rightarrow (1-x^2)y''-2xy'+\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)y=0 \rightarrow m=\frac{1}{2}$$

با توجه به اینکه مقدار m عدد صحیح نیست نوع جواب معادله لژاندر از حالت اول پیروی می‌کند.

معادله فوق دارای دو پایه جواب است که یکی دارای جملات با توان زوج و دیگری جملات با توان فرد است و تعداد جملات هر دو نامحدود است.

3) $(1-x^2)y''-2xy'+420y=0$

$(1-x^2)y''-2xy'+420y=0 \Rightarrow (1-x^2)y''-2xy'+20(20+1)y=0 \Rightarrow m=20$

با توجه به اینکه m عددی زوج است جواب معادله لژاندر بالا از حالت دوم بررسی می‌کنیم:

$m=20 \Rightarrow \begin{cases} h_m(x)= \text{یک چندجمله‌ای درجه 20 با توانهای زوج } x = P_{20}(x) \\ q_m(x)= \text{یک سری نامتناهی شامل توانهای فرد } x \end{cases}$

نکته: چندجمله‌ای‌های لژاندر از فرمول رودریگس بدست می‌آید:

$$P_m(x)=\frac{1}{2^m . m!}\frac{d^m}{dx^m}\left((x^2-1)^m\right)$$

مثلاً چند $P_m(x)$ بکار رفته در بالا را بدست می‌آوریم:

$$P_0(x)=\frac{1}{2^0 . 0!}\frac{d^0}{dx^0}\left((x^2-1)^0\right)=1$$

$$P_1(x)=\frac{1}{2^1 . 1!}\frac{d^1}{dx^1}\left((x^2-1)^1\right)=\frac{2x}{2}=x$$

$$P_2(x)=\frac{1}{2^2 . 2!}\frac{d^2}{dx^2}\left((x^2-1)^2\right)=\frac{1}{8}\frac{d^2}{dx^2}(x^4-2x^2+1)=\frac{1}{8}\left((4x^3-4x)'\right)$$

$$=\frac{1}{8}(12x^2-4)=\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}$$

مثال: چند جمله‌ای $x^4 = f(x)$ را برحسب چند جمله‌ای های لژاندر بیان کنید.

راه ۱: چون چند جمله‌ای فوق از درجه چهارم می‌باشد لذا خواهیم داشت:

$$x^4 = C_0P_0(x) + C_1P_1(x) + C_2P_2(x) + C_3P_3(x) + C_4P_4(x)$$

حال باید با توجه به قضیه بیان شده مقدار C_n ها را پیدا کنیم:

$$C_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(x^4)(1)\,dx = \frac{1}{5}$$

$$C_1 = \frac{3}{2}\int_{-1}^{1}(x^4)(x)\,dx = 0$$

$$C_2 = \frac{5}{2}\int_{-1}^{1}(x^4)\left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}\right)dx = \frac{4}{7}$$

$$C_3 = \frac{7}{2}\int_{-1}^{1}(x^4)\left(\frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x\right)dx = 0$$

$$C_4 = \frac{9}{2}\int_{-1}^{1}(x^4)\left(\frac{35}{8}x^4 - \frac{30}{8}x^2 + \frac{3}{8}\right)dx = \frac{8}{35}$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$x^4 = \frac{1}{5}P_0(x) + \frac{4}{7}P_2(x) + \frac{8}{35}P_4(x)$$

راه دوم: چون چند جمله‌ای فوق از درجه چهارم می‌باشد لذا خواهیم داشت:

$$x^4 = C_0P_0(x) + C_1P_1(x) + C_2P_2(x) + C_3P_3(x) + C_4P_4(x) \quad (*)$$

مقدار $P_1(x)$ ، $P_2(x)$ ، $P_3(x)$ ، $P_4(x)$ را با توجه به نکته گفته شده در مثال قبل می‌توانیم

بدست آوریم:

$P_0(x)=1$ $P_1(x)=x$ $P_2(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}$

$P_3(x)=\frac{5}{2}x^3-\frac{3}{2}x$ $P_4(x)=\frac{35}{8}x^4-\frac{30}{8}x^2+\frac{3}{8}$

حال با قرار دادن مقادیر فوق در رابطه ⊛ و مساوی قرار دادن ضرایب x خواهیم داشت:

$$x^4=C_0+C_1x+C_2\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}\right)+C_3\left(\frac{5}{2}x^3-\frac{3}{2}x\right)+C_4\left(\frac{35}{8}x^4-\frac{30}{8}x^2+\frac{3}{8}\right)$$

ضریب x^4 : $\frac{35}{8}C_4=1 \Rightarrow C_4=\frac{8}{35}$

ضریب x^3 : $\frac{5}{2}C_3=0 \Rightarrow C_3=0$

ضریب x^2 : $\frac{-30}{8}C_4+\frac{3}{2}C_2=0 \Rightarrow C_2=\frac{4}{7}$

ضریب x : $-\frac{3}{2}C_3+C_1=0 \Rightarrow C_1=0$

ضریب x^0 : $C_0-\frac{1}{2}C_2+\frac{3}{8}C_4=0 \Rightarrow C_0=\frac{1}{5}$

پس با جایگزینی ضرایب فوق در معادله (*) خواهیم داشت:

$$x^4=\frac{1}{5}P_0(x)+\frac{4}{7}P_2(x)+\frac{8}{35}P_4(x)$$

مثال: اگر $P_n(x)$ یک چند جمله‌ای لژاندر باشد مقدار $\int_{-1}^{1}(x+1)P_0(x)dx$ را بیابید.

با توجه به نکته گفته شده $P_0(x)=1$ لذا خواهیم داشت:

$$\int_{-1}^{1}(x+1)P_0(x)dx=\int_{-1}^{1}(x+1)(1)dx=\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Big|_{-1}^{1}=2$$

Subject: Date:

مثال: اگر $P_m(x)$ مبین چندجمله‌ای لژاندر باشد حاصل انتگرال زیر را بیابید.

$$\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} P_{2k+1}(x)\cdot(x^4+\cos x)\,dx$$

با توجه به اینکه چندجمله‌ای $P_{2k+1}(x)$ یک چندجمله‌ای فرد است و

تابع $(x^4+\cos x)$ یک تابع زوج است و ضرب یک تابع زوج و فرد یک تابع فرد

است. حاصل انتگرال در بازه متقارن صفر است:

$$\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} \underbrace{P_{2k+1}(x)}_{\text{فرد}}\cdot\underbrace{(x^4+\cos x)}_{\text{زوج}}\,dx=0$$

مثال: اگر $P_m(x)$ مبین چندجمله‌ای لژاندر باشد حاصل انتگرال $\int_{-1}^{1} x^2 P_3(x)dx$ را بیابید.

حل: با توجه به اینکه چندجمله‌ای $P_3(x)$، یک تابع فرد است و تابع x^2 یک تابع زوج است

و حاصلضرب دو تابع فرد و زوج، فرد است. حاصل انتگرال در بازه متقارن صفر است:

$$\int_{-1}^{1} \underbrace{x^2}_{\text{زوج}}\,\underbrace{P_3(x)}_{\text{فرد}}\,dx=0$$

مثال: می‌دانیم y_1 جوابی به فرم چندجمله‌ای برای معادله دیفرانسیل

$(1-x^2)y''-2xy'+30y=0$ و y_2 جوابی بصورت چندجمله‌ای برای معادله دیفرانسیل

$(1-x^2)y''-2xy'+56y=0$ می‌باشند حاصل انتگرال زیر را بیابید.

$$A=\int_{-1}^{1} y_1\cdot y_2\,dx$$

DATA

ابتدا باید فرم جواب دو معادله فوق را بدست آوریم:

$(1-x^2)y''-2xy'+30y=0 \Rightarrow (1-x^2)y''-2xy'+5(5+1)y=0 \Rightarrow m_1=5$

پس با توجه به اینکه $m_1=5$ یک عدد فرد است خواهیم داشت:

$y_1=P_5(x)$

$(1-x^2)y''-2xy'+56y=0 \Rightarrow (1-x^2)y''-2xy'+7(7+1)y=0 \Rightarrow m_2=7$

پس با توجه به اینکه $m_2=7$ یک عدد فرد است، لذا خواهیم داشت:

$y_2=P_7(x)$

$$A=\int_{-1}^{1} y_1\cdot y_2\,dx=\int_{-1}^{1} P_5(x)\cdot P_7(x)\,dx \xrightarrow{m_1\neq m_2} A=0$$

معادله دیفرانسیل بسل:

معادله دیفرانسیل بسل بصورت زیر نوشته می‌شود:

$x^2y''+xy'+(x^2-\upsilon^2)y=0$

برای بدست آوردن جواب حول نقطه $x_0=0$ که یک نقطه تکین منظم است کافی است

جواب را به فرم $y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\cdot x^{n+r}$ در نظر گرفته و با جایگذاری y و مشتقاتش در معادله

(با استفاده از فروبنیوس) مقدار r را بدست آوریم:

$r^2+(a_0-1)r+b_0=0 \Rightarrow a_0=1 \quad , \quad b_0=-\upsilon^2$

$r^2-\upsilon^2=0 \Rightarrow r_1=\upsilon \qquad r_2=-\upsilon$

می‌توان دید ریشه‌های معادله مشخصه $\pm\upsilon$ خواهد بود. اگر جواب معادله را با روش

Subject: Date:

زد بنیوس پیدا کنیم به دو سری توانی نامتناهی پیچیده می‌رسیم:

$$y(x) = C J_{\vartheta}(x) + K J_{-\vartheta}(x)$$

نکته بسیار مهم اینجا است که اگر ϑ یک عدد غیر طبیعی باشد می‌توان جواب

معادله بسل را به جواب عمومی ارائه شده ارجاع داد. در حالت کلی جواب فوق نمی‌تواند

توصیف کننده جواب عمومی معادله بسل مورد نظر باشد، زیرا وقتی ϑ عدد طبیعی باشد داریم:

$$J_{-\vartheta}(x) = (-1)^{\vartheta} J_{\vartheta}(x)$$

لذا پایه جواب دوم معادله بسل مورد نظر را به طریق دیگری پیدا می‌کنند، جواب عمومی

بدست آمده برای تمام موارد ϑ بکار می‌رود:

$$y(x) = C J_{\vartheta}(x) + K Y_{\vartheta}(x)$$

نکته: در معادله فوق جواب فروبینیوس جواب $Y_{\vartheta}(x)$ طبیعت لگاریتمی دارد.

$J_{\vartheta}(x)$: تابع بسل نوع اول از مرتبه ϑ، جواب معادله بسل بوده و وقتیکه x به سمت

صفر میل می‌کند این تابع محدود (کراندار) می‌باشد.

$Y_{\vartheta}(x)$: تابع بسل نوع دوم از مرتبه ϑ یا تابع نیومن، جواب معادله بسل بوده و وقتیکه

x به سمت صفر میل می‌کند نامحدود (بی‌کران) و مقدار آن ∞ می‌باشد.

DATA

نکات تکمیلی:

نکته 1: می‌توان نشان داد در معادله دیفرانسیل $x^2y''+xy'+(\lambda^2x^2-\nu^2)y=0$

با تغییر متغیر $u=\lambda x$ به یک معادله بسل استاندارد می‌رسیم که درنهایت جواب عمومی به

فرم روبرو خواهد بود: $y(x)=AJ_\nu(\lambda x)+BY_\nu(\lambda x)$

نکته 2: می‌توان نشان داد در معادله دیفرانسیل

$$x^2y''+(2k+1)xy'+(m^2x^{2r}+n^2)y=0$$

با فرض $s=\sqrt{k^2-n^2}$ جواب عمومی به فرم زیر است:

$$y(x)=x^{-k}\left(AJ_{\frac{s}{r}}\left(\frac{mx^r}{r}\right)+BY_{\frac{s}{r}}\left(\frac{mx^r}{r}\right)\right)$$

نکته 3: روابط زیر همیشه برقرار است:

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x \qquad J_{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x$$

نکته 4: خواص توابع نوع اول عبارتند از:

1) $J_{-\nu}(x)=(-1)^\nu J_\nu(x) \quad (\nu\in N)$

2) $(x^\nu J_\nu(x))'=x^\nu J_{\nu-1}(x)$

3) $(x^{-\nu}J_\nu(x))'=-x^{-\nu}J_{\nu+1}(x)$

4) $J_{\nu-1}(x)+J_{\nu+1}(x)=\frac{2\nu}{x}J_\nu(x)$

5) $J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) = 2J_\nu'(x)$

6) $\int x^\nu J_{\nu-1}(x)\,dx = x^\nu J_\nu(x) + C$

7) $\int x^{-\nu} J_{\nu+1}(x)\,dx = -x^{-\nu} J_\nu(x) + C$

8) $\int J_{\nu+1}(x)\,dx = \int J_{\nu-1}(x)\,dx - 2J_\nu(x)$

مثال: جواب عمومی معادلات دیفرانسیل زیر را برحسب توابع بسل بنویسید.

E 1) $x^2y'' + xy' + \left(\frac{x^2}{9} - 16\right)y = 0$

در این مسأله داریم:

$2k+1 = 1 \Rightarrow k = 0$

$m^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow m = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow s = \sqrt{k^2 - n^2} = \sqrt{0+16} = 4$

$2r = 2 \Rightarrow r = 1$

$n^2 = -16$

پس خواهیم داشت:

$$y(x) = x^{-0}\left[A\,J_{\frac{4}{1}}\left(\frac{\frac{1}{3}x^1}{1}\right) + B\,Y_{\frac{4}{1}}\left(\frac{\frac{1}{3}x^1}{1}\right)\right]$$

$$\Rightarrow y(x) = A\,J_4\left(\frac{x}{3}\right) + B\,Y_4\left(\frac{x}{3}\right)$$

E 2) $x^2y'' + 3xy' + xy = 0$

در این مسأله داریم:

$2k+1=3 \Rightarrow k=1$

$m^2=1 \Rightarrow m=1$

$2r=1 \Rightarrow r=\frac{1}{2}$ $\qquad \Rightarrow S=\sqrt{k^2-n^2}=\sqrt{1-0}=1$

$n^2=0$

پس خواهیم داشت:

$$y(x)=x^{-1}\left[A\,J_{\frac{1}{\frac{1}{2}}}\left(\frac{1\,x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right)+B\,Y_{\frac{1}{\frac{1}{2}}}\left(\frac{1\,x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right)\right]$$

$$\Rightarrow y(x)=x^{-1}\left(A\,J_2(2\sqrt{x})+B\,Y_2(2\sqrt{x})\right)$$

E.3) $x^2y''+5xy'+(16x^6-3)\,y=0$

$2k+1=5 \Rightarrow k=2$

$m^2=16 \Rightarrow m=4$

$2r=6 \Rightarrow r=3$ $\qquad \Rightarrow S=\sqrt{k^2-n^2}=\sqrt{4+3}=\sqrt{7}$

$n^2=-3$

پس خواهیم داشت:

$$y(x)=x^{-2}\left[A\,J_{\frac{\sqrt{7}}{3}}\left(\frac{4x^3}{3}\right)+B\,Y_{\frac{\sqrt{7}}{3}}\left(\frac{4x^3}{3}\right)\right]$$

مثال، مطلوب است محاسبه انتگرالهای زیر:

$$I_1=\int x^4\,J_1(x)\,dx$$

$$\int x^4\,J_1(x)\,dx=\int \underbrace{x^2}_{u}\cdot\underbrace{x^2J_1(x)\,dx}_{dv}$$

با اعمال روش جزء به جزء خواهیم داشت:

$x^2 = u \qquad du = 2x\,dx$

$$\Longrightarrow$$

$x^2 J_1(x)\,dx = dv \qquad v = \int x^2 J_1(x)\,dx \xrightarrow{\text{نکته 9 شماره 6}} v = x^2 J_2(x)$

$I_1 = u.v - \int v\,du = x^4 J_2(x) - \int 2x^3 J_2(x)\,dx \xrightarrow{\text{باتوجه به نکته 9 شماره 6}}$

$I_1 = x^4 J_2(x) - 2x^3 J_3(x) + C$

$I_2 = \int_0^1 x^3 J_0(x)\,dx$

$\int_0^1 x^3 J_0(x)\,dx = \int_0^1 \underbrace{x^2}_{u} \cdot \underbrace{x^1 J_0(x)\,dx}_{dv}$

$x^2 = u \qquad du = 2x\,dx$

$$\Longrightarrow$$

$x J_0(x)\,dx = dv \qquad v = \int x J_0(x)\,dx \xrightarrow{\text{نکته 4 شماره 6}} v = x^1 J_1(x)$

$\Rightarrow I_2 = \int_0^1 x^2 \cdot (x J_0(x))\,dx = \left(uv - \int v\,du\right)\Big|_0^1 = \left(x^3 J_1(x) - \int 2x^2 J_1(x)\,dx\right)\Big|_0^1$

$\xrightarrow{\text{باتوجه به نکته 9 شماره 6}} I_2 = \left(x^3 J_1(x) - 2x^2 J_2(x)\right)\Big|_0^1 \Rightarrow I_2 = J_1(1) - 2J_2(1)$

تابع گاما: جلسه ۱۱

تابع گاما برای $x>0$ بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Gamma(x)=\int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt \qquad (1)$$

می‌توان نشان داد که انتگرال (1) برای $x>0$ همگراست، بدین معنی که حد

$$\lim_{b\to\infty}\int_0^{b} t^{x-1}e^{-t}\,dt \qquad (2)$$

موجود است و برای $x\leq 0$ انتگرال (1) واگراست یعنی حد (2) وجود ندارد.

با قرار دادن $x+1$ به جای x در (1) خواهیم داشت:

$$\Gamma(x+1)=\int_0^{\infty} t^{x}e^{-t}\,dt \qquad (3)$$

اگر انتگرال (3) را به روش جزء به جزء محاسبه کنیم، به خاصیت جالب تابع گاما دست می‌یابیم که عبارت است از:

$$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x) \qquad x>0$$

بطور کلی برای هر $n\geq 0$ و صحیح داریم:

$$\Gamma(n+1)=n!$$

برای $x<0$ و غیرصحیح، تابع $\Gamma(x)$ را برحسب $\Gamma(x+1)$ بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\Gamma(x)=\frac{\Gamma(x+1)}{x} \qquad x<0 \qquad (4)$$

اگر $x+1>0$، آنگاه عبارت طرف دوم (4) را می‌توان محاسبه نمود.

ولذا مقدار $\Gamma(x)$ برای $x<0$ بدست می‌آید.

$$\Gamma(-\frac{1}{2}) = \frac{\Gamma(-\frac{1}{2}+1)}{-\frac{1}{2}} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{-\frac{1}{2}} = -2\Gamma(\frac{1}{2})$$

از طرفی می‌دانیم $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$ پس:

$$\Gamma(-\frac{1}{2}) = -2\Gamma(\frac{1}{2}) = -2\sqrt{\pi}$$

و همینطور:

$$\Gamma(-2.4) = \frac{\Gamma(-2.4+1)}{-2.4} = \frac{\Gamma(-1.4)}{-2.4} = \frac{\Gamma(-1.4+1)}{(-2.4)(-1.4)} =$$

$$\frac{\Gamma(-0.4)}{(-2.4)(-1.4)} = \frac{\Gamma(-0.4+1)}{(-2.4)(-1.4)(-0.4)} = \frac{\Gamma(.6)}{(-2.4)(-1.4)(-0.4)}$$

حال $\Gamma(.6) = \frac{\Gamma(1.6)}{.6}$ و از جدول داریم $\Gamma(1.6) = .89352$. بنابراین

$$\Gamma(-2.4) = -1.1080$$

* مقادیر $\Gamma(x)$ برای $1 \leqslant x \leqslant 2$ به شکل جدولهایی در دسترس هستند.

* تابع $\Gamma(x)$ در نقطه $x=0$ و نقاط x صحیح و منفی تعریف نمی‌شود.

تابع $x!$: برای هر x، بجز xهای صحیح و منفی، $x!$ بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$x! = \Gamma(x+1) \qquad x \neq -1 \,,\, x \neq -2 \,,\, \dots$$

تذکر: چون $\Gamma(x)$ به ازای هیچ مقدار x صفر نمی‌شود، پس $\frac{1}{\Gamma(x)}$ را برای

هر x می‌توان تعریف نمود. اگر x صحیح و نامثبت باشد، تعریف می‌کنیم:

$$\frac{1}{\Gamma(x)}=0$$

مثال: مقدار $\Gamma(4)$ را بدست آورید.

$$\Gamma(4)=\Gamma(3+1)=3\Gamma(3)=3\Gamma(2+1)=3\times2\Gamma(2)=3\times2\times1\Gamma(1)=3!$$

$$\Rightarrow \Gamma(4)=3!=12$$

مثال: مطلوبست محاسبه انتگرال روبرو:

$$I=\int_0^\infty x^2 e^{-2x^4}dx$$

$$2x^4=t \Rightarrow 8x^3dx=dt \qquad \Rightarrow x=\left(\frac{t}{2}\right)^{\frac14}$$

$$\Rightarrow I=\int_0^\infty x^2e^{-2x^4}dx=\int_0^\infty \frac18\left(\left(\frac{t}{2}\right)^{\frac14}\right)^2 \cdot e^{-t}\cdot\frac{1}{\left(\left(\frac{t}{2}\right)^{\frac14}\right)^3}dt=$$

$$\frac18\int_0^\infty\left(\frac{t}{2}\right)^{-\frac14}e^{-t}dt=\frac{2^{\frac14}}{8}\int_0^\infty t^{(\frac34-1)}e^{-t}dt=\frac{2^{\frac14}}{8}\Gamma\left(\frac34\right)$$

$$*\ \Gamma\left(\frac12\right)=\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(\frac52\right)=\Gamma\left(\frac32+1\right)=\frac32\Gamma\left(\frac32\right)=\frac32\Gamma\left(\frac12+1\right)=\frac32\cdot\frac12\Gamma\left(\frac12\right)$$

$$\Rightarrow \Gamma\left(\frac52\right)=\frac{3\sqrt{\pi}}{4}$$

Subject: Date:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} \, dt \qquad x>0$$

1) $\Gamma(1) = 1$

2) $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\,\Gamma(\alpha) \qquad \alpha > -1 \qquad \alpha>0$

3) $\Gamma(n+1) = n! \qquad n \in N$

4) $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi} \Rightarrow \Gamma(\frac{3}{2}) = \Gamma(\frac{1}{2}+1) = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

DATA

تبدیل لاپلاس :

مقدمه :

تاکنون روشهای گوناگونی برای حل معادلات دیفرانسیل ارائه نموده ایم . در این فصل روش دیگری را معرفی خواهیم نمود که در بسیاری از شاخه های ریاضیات کاربردی از اهمیت ویژه ای برخوردار است . و آن روش تبدیلات لاپلاس نام دارد . با استفاده از این روش ، یک مسأله مقدار اولیه به یک معادله جبری یا یک دستگاه از معادلات جبری تبدیل می شود که با حل این معادلات و استفاده از جدول تبدیلات لاپلاس می توان به جواب مسأله مقدار اولیه دست یافت . از تبدیلات لاپلاس در حل معادلات انتگرالی نیز استفاده می شود .

تعریف : تبدیل لاپلاس تابع $f_{(t)}$ که برای $t>0$ تعریف شده ، با $F_{(s)}$ یا $L[f_{(t)}]$ نمایش داده می شود و عبارت است از :

$$L[f_{(t)}] = F_{(s)} = \int_0^{\infty} e^{-st} f_{(t)} dt$$

تابع $F_{(s)}$ را تبدیل لاپلاس تابع $f_{(t)}$ و تابع $f_{(t)}$ را تبدیل معکوس $F_{(s)}$ گوئیم و آن را با $L^{-1}[F_{(s)}]$ نمایش می دهیم .

$$f_{(t)} = L^{-1}[F_{(s)}]$$

حوزه تعریف F مجموعه s هایی است که به ازای آنها انتگرال فوق همگراست ، یعنی s هایی که به ازای آنها حد زیر موجود است :

$$\lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-st} f_{(t)} dt$$

مثال ۱: تبدیل لاپلاس $f_{(t)}=1$ را بدست آورید.

حل:
$$L[1]=\int_0^{\infty} e^{-st}(1)\,dt=\int_0^{\infty} e^{-st}\,dt=\lim_{b\to\infty}\int_0^{b} e^{-st}\,dt$$

$$=\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_0^b=\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{e^{-sb}}{s}-\left(-\frac{1}{s}e^{0}\right)\right]=0+\frac{1}{s}=\frac{1}{s}$$

$$L[1]=\frac{1}{s}$$

مثال ۲: تبدیل لاپلاس $f_{(t)}=e^{at}$ را بدست آورید.

حل:
$$L[e^{at}]=\int_0^{\infty} e^{-st}\cdot e^{at}\,dt=\lim_{b\to\infty}\int_0^{b} e^{(a-s)t}\,dt$$

$$=\lim_{b\to\infty}\left[\frac{e^{(a-s)t}}{a-s}\right]_0^b=\lim_{b\to\infty}\left[\frac{e^{(a-s)b}}{a-s}-\frac{1}{a-s}\right]=\frac{1}{s-a}$$

اگر $s>a$ آنگاه حد فوق موجود است.

$$L[e^{at}]=\frac{1}{s-a}$$

تبصره: تبدیل لاپلاس و معکوس تبدیل لاپلاس دارای خاصیت خطی است.

$$L[af_{1(t)}+bf_{2(t)}]=aL[f_{1(t)}]+bL[f_{2(t)}]$$

$$L^{-1}[aF_{1(s)}+bF_{2(s)}]=aL^{-1}[F_{1(s)}]+bL^{-1}[F_{2(s)}]$$

تبدیل لاپلاس بعضی از توابع مهم در جدول زیر آورده شده است.

$f_{(t)}$	$F_{(s)}$
a	$\frac{a}{s}$ $\quad s>0$
at^n	$\frac{a\,n!}{s^{n+1}}$ $\quad s>0$
$kt^a,\ a>-1$	$k\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$ $\quad s>0$
ke^{at}	$\frac{k}{s-a}$ $\quad s>a$
$k\cos at$	$k\frac{s}{s^2+a^2}$ $\quad s>0$
$k\sin at$	$k\frac{a}{s^2+a^2}$ $\quad s>0$
$k\cosh at$	$k\frac{s}{s^2-a^2}$ $\quad s>\lvert a\rvert$
$k\sinh at$	$k\frac{a}{s^2-a^2}$ $\quad s>\lvert a\rvert$

$$L(2t+3)=2L(t)+L(3)=2\cdot\frac{1}{s^2}+\frac{3}{s}=\frac{2}{s^2}+\frac{3}{s}$$

مثال ۳: تبدیل لاپلاس تابع زیر را پیدا کنید.

$$f_{(t)}=4t^2-2\cos 3t+5e^{-t}-3\sinh 2t+1$$

$$L f_{(t)}=4L[t^2]-2L[\cos 3t]+5L[e^{-t}]-3L[\sinh 2t]+L[1]$$

$$F(s)=4\,\frac{2!}{s^{2+1}}-2\,\frac{s}{s^2+9}+\frac{5}{s+1}-3\,\frac{2}{s^2-4}+\frac{1}{s}$$

$$=\frac{8}{s^3}-\frac{2s}{s^2+9}+\frac{5}{s+1}-\frac{6}{s^2-4}+\frac{1}{s}$$

مثال ۴: اگر $\frac{3}{s+4}$ تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ باشد، $f(t)$ را بدست آورید.

$$F(s)=\frac{3}{s+4}\rightarrow L^{-1}[F(s)]=L^{-1}\left[\frac{3}{s+4}\right]=3\,L^{-1}\left[\frac{1}{s+4}\right]=3e^{-4t}=f(t)$$

تبدیل لاپلاس مشتق:

f روی $[a,b]$ پیوسته قطعه‌ای گویند هرگاه روی تمام نقاط این فاصله به جز تعداد متناهی نقطه پیوسته باشد و در نقاط ناپیوسته دارای حد چپ و راست باشد

قضیه: اگر $f(t)$ تابعی پیوسته روی $t\geq 0$ و $f'(t)$ تابعی پیوسته قطعه‌ای روی $t\geq 0$ باشد،

و هر تابع پیوسته، پیوسته قطعه‌ای است

آنگاه

$$L[f'(t)]=sL[f(t)]-f(0^+)$$

و اگر تابع $f(t)$ و $f'(t)$ روی $t\geq 0$ پیوسته و $f''(t)$ تابعی پیوسته قطعه‌ای روی $t\geq 0$ باشد،

داریم

$$L[f''(t)]=s^2L[f(t)]-sf(0^+)-f'(0^+)$$

مثال ۵: جواب معادله دیفرانسیل همگن $f''(t)+8f'(t)+16f(t)=0$ با شرایط اولیه

$f(0)=2$ و $f'(0)=1$ را بدست آورید.

راه حل اول: معادله مشخصه دارای ریشه مضاعف است زیرا

$$t^2+8t+16=0$$
$$(t+4)^2=0\Longrightarrow t=-4$$

لذا جواب عمومی به فرم زیر می‌باشد

$$f(t)=(C_1+C_2t)e^{-4t}\quad,\quad f(0)=C_1=2$$

فرض کنید $X(s)=L[x(t)]$، آنگاه داریم:

$$(s+2)X(s)=\frac{4}{s^2}$$

و از این جا:

$$X(s)=\frac{4}{s^2(s+2)}$$

با تجزیه کسر در (۲) به کسرهای ساده، به دست می‌آوریم:

$$X(s)=-\frac{1}{s}+\frac{2}{s^2}+\frac{1}{s+2}$$

بنابراین:

$$x(t)=L^{-1}[X(s)]=-L^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]+2L^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right]+L^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right]$$

$$x(t)=-1+2t+e^{-2t}$$

مثال: جواب مسئله مقدار اولیه زیر را به دست آورید:

$$x''+3x'+2x=0 \qquad x(0)=0 \ , \ x'(0)=1$$

حل: از دو طرف تبدیل لاپلاس می‌گیریم:

$$L[x'']+3L[x']+2L[x]=L[0]=0$$

یا با فرض $L[x(t)]=X(s)$، داریم:

$$s^2X(s)-sx(0)-x'(0)+3sX(s)+3x(0)+2X(s)=0$$

با جایگزینی مقادیر اولیه خواهیم داشت:

$$(s^2+3s+2)X(s)=1$$

$$X(s)=\frac{1}{s^2+3s+2}=\frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

با تجزیه کسر به کسرهای ساده، داریم:

$$X_{(s)} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

$$x_{(t)} = L^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] - L^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right]$$

$$x_{(t)} = e^{-t} - e^{-2t}$$

مثال: جواب مسأله مقدار اولیه زیر را به دست آورید:

$$t x'' - 4 t x' - 4 x = 0 \qquad x_{(0)} = 0 \ , \ x'_{(0)} = 1$$

حل: تبدیل لاپلاس دو طرف معادله را به دست می‌آوریم داریم:

$$L[t x''] - 4 L[t x'] - 4 L[x] = 0 \qquad (1)$$

آنگاه با توجه به دستور مشتق‌گیری از تبدیلات لاپلاس، داریم: $L[x_{(t)}] = X_{(s)}$ ،

$$L[t x''] = -\frac{d}{ds} L[x''] = -\frac{d}{ds}\left[s^2 X - s x_{(0)} - x'_{(0)}\right]$$

$$= -2sX - s^2 X'$$

$$L[t x'] = -\frac{d}{ds} L[x'] = -\frac{d}{ds}\left[sX - x_{(0)}\right] = -X - sX'$$

با جایگزینی در رابطهٔ (1) معادلهٔ دیفرانسیل مرتبه اول زیر نتیجه می‌شود:

$$(s-4) X' + 2X = 0$$

با حل معادلهٔ مرتبهٔ اول جواب معادله عبارتست از:

$$X_{(s)} = \frac{C}{(s-4)^2}$$

$$x_{(t)} = L^{-1}\left[\frac{C}{(s-4)^2}\right] = C t e^{4t}$$

$$L^{-1}\left[\frac{F(s)}{s}\right]=\int_0^t f(x)\,dx$$

بنابراین نتیجه می‌شود که:

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2+a^2)}\right]=\frac{1}{a}\int_0^t \sin ax\,dx=\frac{1}{a^2}(1-\cos at)$$

و مجدداً با استفاده از قضیهٔ تبدیل لاپلاس انتگرال می‌توان نوشت:

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s^2(s^2+a^2)}\right]=\frac{1}{a^2}\int_0^t (1-\cos ax)\,dx=\frac{1}{a^2}\left(t-\frac{\sin at}{a}\right)$$

$$f(t)=\frac{1}{a^2}\left(t-\frac{\sin at}{a}\right)$$

مثال: می‌دانیم $L[\sin t]=\frac{1}{s^2+1}$ پس: طبق قضیه مشتق‌گیری از تبدیلات لاپلاس

$$L[t^n f(t)]=(-1)^n F^{(n)}(s)$$

$$L[t\sin t]=-\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)=\frac{2s}{(s^2+1)^2}$$

مثال: می‌دانیم $L[e^t]=\frac{1}{s-1}$ پس:

$$L[te^t]=\frac{1}{(s-1)^2}$$

و هم چنین

$$L[t^2e^t]=-\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{(s-1)^2}\right]=\frac{2}{(s-1)^3}$$

$$L[t^n e^t]=\frac{n!}{(s-1)^{n+1}}$$

توجه کنید همین نتیجه از قضایای انتقال نیز بدست می‌آید.

DATA

مثال: اگر $L[F_{(t)}]=\dfrac{s}{(s^2+1)^2}$ تابع $f_{(t)}$ را پیدا کنید.

در این جا $F_{(s)}=\dfrac{s}{(s^2+1)^2}$، با توجه به قضیه $s>0$ $L\left[\dfrac{f_{(t)}}{t}\right]=\int_s^{\infty} f(v)\,dv$

می توان نوشت: $L\left[\dfrac{f(t)}{t}\right]=\int_s^{\infty} F(v)\,dv=\int_s^{\infty}\dfrac{v}{(v^2+1)^2}\,dv=\dfrac{-1}{2(v^2+1)}\Big|_s^{\infty}$

$$=\frac{1}{2(s^2+1)}=L\left[\frac{1}{2}\sin t\right]\longrightarrow f_{(t)}=\frac{t}{2}\sin t$$

مثال: نشان دهید:

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt=\frac{\pi}{2} \qquad s\to 0$$

حل: چون $L[\sin t]=\dfrac{1}{s^2+1}$ بنابراین طبق فرمول:

$$\int_0^{\infty}F_{(s)}\,ds=\int_0^{\infty}\frac{f_{(t)}}{t}\,dt$$

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt=\int_0^{\infty}\frac{1}{s^2+1}\,ds=\frac{\pi}{2}$$

مثال: جواب مسأله مقدار اولیه زیر را پیدا کنید. (کاربرد تبدیلات لاپلاس در حل مسائل مقدار اولیه)

$$x'_{(t)}+2x_{(t)}=4t \quad , \quad x(0)=0$$

حل: از دو طرف معادله تبدیل لاپلاس می گیریم داریم:

$$L[x'_{(t)}]+2L[x_{(t)}]=4L[t]$$

$$sL[x_{(t)}]-x_{(0)}+2L[x_{(t)}]=\frac{4}{s^2}$$

مثال: $L\left[4t^2-3\cos 2t+5e^{-t}\right]$

$$4L\left[t^2\right]-3L\left[\cos 2t\right]+5L\left[e^{-t}\right]=\frac{8}{s^3}-\frac{3s}{s^2+4}+\frac{5}{s+1}$$

مثال: می‌دانیم $L\left[\cos 2t\right]=\frac{s}{s^2+4}$ پس:

$$\checkmark\ L\left[e^{-t}\cos 2t\right]=\frac{s+1}{(s+1)^2+4}$$

مثال: چون $L\left[t^2\right]=\frac{2}{s^3}$، پس:

$$\checkmark\ L\left[t^2e^{3t}\right]=\frac{2}{(s-3)^3}$$

مثال: اگر $f(t)=\sin^2 t$ ، $L\left[f(t)\right]$ پیدا کنید. با استفاده از تبدیل لاپلاس مشتق حل می‌کنیم

حل: داریم

$$f'(t)=2\sin t\cos t=\sin 2t \quad , f(0)=0$$

و:

$$\begin{cases} L\left[f'(t)\right]=sL\left[f(t)\right]-f(0)=sL\left[f(t)\right] \\ L\left[f'(t)\right]=L\left[\sin 2t\right]=\dfrac{2}{s^2+4} \quad , s>0 \end{cases}$$

از طرفی:

بنابراین: $L\left[f(t)\right]=\frac{2}{s(s^2+4)} \quad , s>0$

مثال: تبدیل معکوس تابع زیر را پیدا کنید:

$$F(s)=\frac{5s^2+s+4}{(s+4)(s^2+4)}$$

حل: ابتدا کسر فوق را به کسرهای ساده تجزیه می‌کنیم، داریم:

$$\frac{5s^2+s+4}{(s+4)(s^2+4)}=\frac{4}{s+4}+\frac{s}{s^2+4}-\frac{3}{s^2+4}$$

$$L^{-1}\left[\frac{5s^2+s+4}{(s+4)(s^2+4)}\right]=4L^{-1}\left[\frac{1}{s+4}\right]+L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+4}\right]-\frac{3}{2}L^{-1}\left[\frac{2}{s^2+4}\right]$$

$$=4e^{-4t}+\cos 2t-\frac{3}{2}\sin 2t$$

مثال: پیدا کنید: $L^{-1}\left[\frac{s+1}{s^2-6s+13}\right]$

حل می‌توان نوشت:

$$L^{-1}\left[\frac{s+1}{s^2-6s+13}\right]=L^{-1}\left[\frac{s-3+4}{(s-3)^2+4}\right]=L^{-1}\left[\frac{s-3}{(s-3)^2+4}\right]+2L^{-1}\left[\frac{2}{(s-3)^2+4}\right]$$

$$=e^{3t}\cos 2t+2e^{3t}\sin 2t$$

مثال: اگر $L[f(t)]=\frac{1}{s^2(s^2+a^2)}$ و $a>0$ و ثابت باشد تابع $f(t)$ را بیابید.

حل: داریم: $L^{-1}\left[\frac{1}{s^2+a^2}\right]=\frac{1}{a}\sin at$

بنابراین طبق قضیه تبدیل لاپلاس انتگرال: $F(s)=sL\left[\int_0^t f(x)\,dx\right]$

برای تعیین ثابت c از شرط $x'(0)=1$ استفاده می‌کنیم. پس از محاسبات جبری $c=1$ به

دست می‌آید لذا جواب مسأله چنین است: $x(t)=te^{4t}$

مثال: جواب دستگاه معادلات با شرایط اولیه داده شده زیر را بیابید:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=3x-2y+e^{t} \\ \dfrac{dy}{dt}=5x-3y \end{cases} \quad , \; x(0)=y(0)=0$$

حل: از دو طرف هر یک از معادلات دستگاه تبدیل لاپلاس می‌گیریم:

$$L\left[\frac{dx}{dt}\right]=3\left[L(x)\right]-2L[y]+L[e^{t}]$$

$$L\left[\frac{dy}{dt}\right]=5L[x]-3L[y]$$

قرار می‌دهیم $L[x(t)]=X(s)$ و $L[y(t)]=Y(s)$ آنگاه خواهیم داشت:

$$\begin{cases} sX-x(0)=3X-2Y+\dfrac{1}{s-1} \\ sY-y(0)=5X-3Y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5X-(s+3)Y=0 \\ (s-3)X+2Y=\dfrac{1}{s-1} \end{cases}$$

جواب دستگاه جبری برحسب دو مجهول X و Y بدین صورت است:

$$X(s)=\frac{s+3}{(s-1)(s^2+1)} \quad , \quad Y(s)=\frac{5}{(s-1)(s^2+1)}$$

با تجزیه هویساید از کسرها به کسرهای ساده داریم:

$$X(s)=\frac{2}{s-1}-\frac{2s}{s^2+1}-\frac{1}{s^2+1}$$

$$Y(s)=\frac{5/2}{s-1}-\frac{5/2}{s^2+1}s-\frac{5/2}{s^2+1}$$

با تبدیل معکوس هویساید از توابع جواب دستگاه به صورت زیر به دست می‌آید:

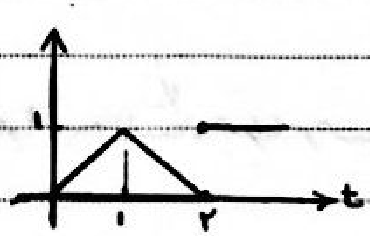
$$\begin{cases} x(t)=2e^t-2\cos t-\sin t \\ y(t)=\frac{5}{2}e^t-\frac{5}{2}\cos t-\frac{5}{2}\sin t \end{cases}$$

مثال: تابع $f(t)$ را که بر بازه $0\le t<\infty$ به صورت زیر تعریف شده است، در نظر بگیرید.

$$f(t)=\begin{cases} t & 0\le t<1 \\ 2-t & 1\le t<2 \\ 1 & 2\le t \end{cases}$$

می‌توان نوشت:

$$f(t)=[\underbrace{u(t)}_{1}-u(t-1)]t+[u(t-1)-u(t-2)](2-t)+u(t-2)$$



$f'(t) = C_2 e^{-4t} - 4(C_1 + C_2 t)e^{-4t}$, $f'(0) = C_2 - 4C_1 = 1 \Rightarrow C_2 = 9$

$f(t) = (2 + 9t)e^{-4t}$

روش دوم: حل معادله با استفاده از تبدیلات لاپلاس

$Lf'' + 8Lf' + 16Lf = 0$

$s^2F(s) - 2s - 1 + 8sF(s) - 16 + 16F(s) = 0$

$F(s) = \frac{2s+17}{s^2+8s+16} = \frac{2(s+4)+9}{(s+4)^2} \Rightarrow f(t) = L^{-1}\left(\frac{2(s+4)+9}{(s+4)^2}\right)$

$f(t) = e^{-4t} L^{-1} \frac{2s+9}{s^2} = e^{-4t}(2+9t)$ $\left(\frac{2}{s+4} + \frac{9}{(s+4)^2}\right)$

$ke^{at} \leftarrow \frac{k}{s-a}$

مثال ۶: هرگاه $y'' - y' + y = t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ باشد آنگاه $L(y)$ را بدست آورید.

$y'' - y' + y = t \rightsquigarrow L(y'') - L(y') + L(y) = L(t)$

$s^2L(y) - sL(y) + L(y) = \frac{1}{s^2} \Rightarrow L(y) = \frac{1}{s^2(s^2 - s + 1)}$

$\frac{As+B}{s^2} + \frac{Cs+D}{s^2-s+1}$ $A = 1$ $B = 1$ $C = -1$ $D = 0$

تبدیل لاپلاس انتگرال

اگر $Lf(t) = F(s)$ باشد آنگاه $L\left[\int_0^t f(r)dr\right] = \frac{1}{s}F(s)$

$L^{-1}\frac{1}{s}F(s) = \int_0^t f(r)dr$

مثال ۷: معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$y'' - 4y' = 1$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$

از طرفین معادله لاپلاس می‌گیریم.

$Ly'' - 4Ly' = L1$

$$s^2 L(y) - s\,y(0) - y'(0) - 4\,sL(y) - y(0) = \frac{1}{s}$$

$$s^2 L(y) - 4sL(y) = \frac{1}{s} \Rightarrow L(y) = \frac{1}{s^2(s-4)}$$

$$y(t) = L^{-1}\frac{1}{s^2(s-4)} = \int_0^t \left[\int_0^t e^{4r}\,dr\right]dt = \int_0^t \left(\frac{1}{4}e^{4r}\Big|_0^t\right)dt$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^t (e^{4t}-1)\,dt = \frac{1}{16}(e^{4t}-4t-1)$$

مثال ۸: تبدیل معکوس تابع $\frac{1}{s(s+2)}$ را بدست آورید.

$$L^{-1}\frac{1}{s+2} = e^{-2t}$$

$$L^{-1}\frac{1}{s(s+2)} = \int_0^t e^{-2r}\,dr = -\frac{1}{2}e^{-2r}\Big|_0^t = -\frac{1}{2}(1-e^{-2t})$$

قضایای انتقال

قضیه: اگر $L[f(t)] = F(s)$ باشد آنگاه

$$L[e^{at}f(t)] = F(s-a)$$

$$L^{-1}[F(s-a)] = e^{at}L^{-1}F(s)$$

تعریف: تابع پله‌ای واحد که با نماد $u_c(t)$ یا $u(t-c)$ نشان داده می‌شود، عبارتست از:

$$u_c(t) = \begin{cases} 0 & \text{اگر } t<c \\ 1 & \text{اگر } t>c \end{cases}, \quad c \geq 0$$

$$L[u_c(t)] = \frac{1}{s}e^{-sc}$$

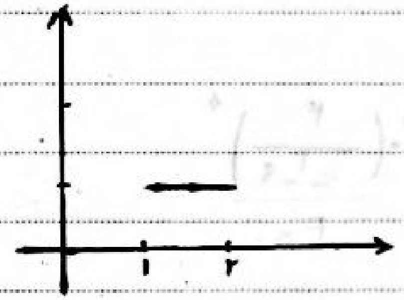
تفسیر: اگر $L[f(t)] = F(s)$ ، $c>0$ باشد، آنگاه

$$L[u_c(t)\, f(t-c)] = e^{-cs} L[f(t)] = e^{-cs} F(s)$$

$$L^{-1}[e^{-cs} F(s)] = u_c(t)\, f(t-c)$$

$$L[u_c(t) f(t)] = e^{-cs} L[f(t+c)]$$

مثال ۹: تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ که نمودار آن در شکل نشان داده شده است کدام یک از مقادیر زیر است:



۱) $F(s) = \dfrac{e^{-s}}{s}(1 - e^{-s})$

۲) $F(s) = \dfrac{1}{s+1} - \dfrac{1}{s-2}$

۳) $F(s) = \dfrac{e^{-s}}{s+1} - \dfrac{u(s-2)}{s+2}$

۴) $F(s) = \dfrac{u(s-1)}{s+1} - \dfrac{u(s-2)}{s+2}$

حل: $f(t) = u_1(t) - u_2(t)$

$$F(s) = L[u_1(t)] - L[u_2(t)] = \frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-2s}}{s} = \frac{e^{-s}}{s}(1 - e^{-s})$$

مشتق گیری از تبدیل لاپلاس ، انتگرال گیری از تبدیل لاپلاس

قضیه: اگر $L[f_{(t)}]=F_{(s)}$ ، آنگاه

$$L[t^n \cdot f_{(t)}]=(-1)^n \frac{d^n F_{(s)}}{ds^n}$$

اگر $n=1$ باشد داریم:

$$L[t \cdot f_{(t)}]=-F'_{(s)}$$

در حالت معکوس داریم:

$$L^{-1}[F'_{(s)}]=-t \cdot f_{(t)}$$

مثال ۱۰: تبدیل لاپلاس توابع زیر را به دست آورید.

1) $f_{(t)}=t^2 \sin 3t$

$$L[\sin 3t]=\frac{3}{s^2+9} \Rightarrow L[t^2 \sin 3t]=(-1)^2 \cdot \underbrace{\left(\frac{3}{s^2+9}\right)''}_{F''_{(s)}}$$

$$\Rightarrow L[f_{(t)}]=\frac{18s^2-54}{(s^2+9)^3}$$

$$*\left(\frac{3}{s^2+9}\right)'=\frac{-6s}{(s^2+9)^2} \rightsquigarrow \left(\frac{3}{s^2+9}\right)''=\left(\frac{-6s}{(s^2+9)^2}\right)'=\frac{-6(s^2+9)^2-4s(s^2+9)(-6s)}{(s^2+9)^4}$$

$$\frac{-6(s^2+9)+24s^2}{(s^2+9)^3}=\frac{18s^2-54}{(s^2+9)^3}$$

2) $L[t^2 e^{2t}]=f_{(t)}$

$$L[e^{2t}]=\frac{1}{s-2}=F_{(s)} \quad , F'_{(s)}=\frac{-1}{(s-2)^2} \quad , F''_{(s)}=\frac{2}{(s-2)^3}$$

$$L[t^2 e^{2t}]=F''_{(s)}=\frac{2}{(s-2)^3}$$

تعمیم: هرگاه $L[f(t)]=F(s)$ باشد داریم:

$$L\left[\frac{1}{t} f(t)\right] = \int_s^{+\infty} F(u)\cdot du$$

مثال ۱۱: مطلوبست محاسبه تبدیل لاپلاس تابع زیر:

$$f(t) = \frac{\sin^2 t}{t}$$

$$L[\sin^2 t] = L\left[\frac{1-\cos 2t}{2}\right] = \frac{1}{2} L[1-\cos 2t] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+4}\right]$$

$$L\left[\frac{1}{t}\cdot \sin^2 t\right] = \int_s^{+\infty} F(u)\cdot du = \frac{1}{2}\int_s^{+\infty}\left[\frac{1}{u} - \frac{u}{u^2+4}\right] du =$$

$$\frac{1}{2}\left[\ln u - \frac{1}{2}\ln(u^2+4)\right]\Big|_s^{+\infty}$$

$$\Rightarrow F(s) = \frac{1}{2}\left[\ln \frac{u}{(u^2+4)^{1/2}}\right]\Big|_s^{+\infty} = -\frac{1}{2}\left[\ln 1 - \ln\frac{s}{\sqrt{s^2+4}}\right] = \frac{1}{2}\ln\frac{s}{\sqrt{s^2+4}}$$

تابع دلتای دیراک (ضربه)

تابع دلتای دیراک به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\delta_a(t) = \delta(t-a) = \begin{cases} 0 & t=a \\ \infty & t\neq a \end{cases}$$

به طوری که همواره $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_a(t)\, dt = 1$

به خاطر داشته باشید می‌توان نشان داد:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\delta_a(t)\, dt = f(a)$$

لاپلاس $\delta(t)$ ، 1

$$L[\delta_a(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st}\,\delta_a(t)\, dt = e^{-sa} \qquad \int_0^{\infty} \delta(\tau-b)\, g(\tau)\, d\tau = g(b)$$

کانولوشن:

تعریف: کانولوشن دو تابع $f_{(t)}$ و $g_{(t)}$ که با $(f*g)t$ نشان داده می‌شود عبارت است از:

$$(f*g)t=\int_0^t f_{(\lambda)}\,g(t-\lambda)\,d\lambda$$

می‌توان نشان داد هرگاه $L[f_{(t)}]=F_{(s)}$ ، $L[g_{(t)}]=G_{(s)}$ باشند، داریم:

$$L[f*g]=F_{(s)}\cdot G_{(s)}$$

و در فرم معکوس

$$L^{-1}[F_{(s)}\cdot G_{(s)}]=(f*g)(t)$$

$$L\int_0^t f(\lambda)\,g(t-\lambda)\,d\lambda=F_{(s)}\,G_{(s)}$$

مثال: مقدار تابع که در معادلهٔ زیر صدق کند را بدست آورید.

$$f_{(t)}=t^2+\int_0^t \sin(t-u)\,f(u)\,du$$

حل:

$$L[f_{(t)}]=Lt^2+L\int_0^t \sin(t-u)f(u)\,du$$

$$F_{(s)}=\frac{2}{s^3}+\underbrace{\frac{1}{s^2+1}}_{G_{(s)}}\underbrace{F_{(s)}}_{L[f_{(u)}]=F_{(s)}}\rightarrow F_{(s)}=\frac{2s^2+2}{s^5}=\frac{2}{s^3}+\frac{2}{s^5}$$

$$f_{(t)}=t^2+\frac{t^4}{12}$$

Subject: Date:

دستگاه معادلات دیفرانسیل

مقدمه:

در اغلب مسائل ریاضیات کاربردی، چند متغیر وابسته وجود دارند که هر کدام تابعی از یک متغیر هستند و این متغیر معمولاً زمان است. وقتی این نوع مسائل با عبارتهای ریاضی توصیف شوند، نتیجه غالباً یک دستگاه معادلات دیفرانسیل می باشد که در آن تعداد معادلات برابر با تعداد متغیرهای وابسته است. به عنوان مثال، در شبکه های الکتریکی شامل چند حلقه هستند، یا در دستگاههای مکانیکی شامل چند فنر و جرم، با دستگاههای معادلات دیفرانسیل مواجه می شویم. اگر هر یک از معادلات دستگاه، یک معادله دیفرانسیل خطی باشد برای حل این دستگاه، از روش حذفی یا روش اپراتوری استفاده می کنیم.

مثال: جواب عمومی دستگاه معادلات زیر را تعیین کنید:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x + 4y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y \end{cases}$$

حل: از معادله اول داریم

$$y = \frac{1}{4}\cdot\frac{dx}{dt} - \frac{5}{4}x \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{1}{4}\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{5}{4}\frac{dx}{dt} \qquad (1)$$

حال در معادله دوم به جای y و $\frac{dy}{dt}$ مقادیر می گذاریم، داریم:

DATA

$$\frac{1}{4}\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{5}{4}\frac{dx}{dt}=x+2\left(\frac{1}{4}\frac{dx}{dt}-\frac{5}{4}x\right)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}-7\frac{dx}{dt}+6x=0$$

معادله فوق، خطی با ضرایب ثابت است. با تشکیل معادله مفسر جواب مربوط به $x(t)$ را بدست می‌آوریم.

$$r^2-7r+6=0 \Longrightarrow r=\frac{7\pm\sqrt{49-24}}{2} \quad , \quad r=6,1$$

$$x(t)=C_1e^{t}+C_2e^{6t}$$

با جایگذاری $x(t)$ در (1) داریم:

$$y(t)=\frac{1}{4}\left(C_1e^{t}+6C_2e^{6t}\right)-\frac{5}{4}\left(C_1e^{t}+C_2e^{6t}\right)=-C_1e^{t}+\frac{1}{4}C_2e^{6t}$$

تمرین:

۱- تبدیل لاپلاس تابع $f(t)=\cos^2 t$ را حساب کنید.

۲- تبدیل لاپلاس $f(t)=t$ را بیابید (روش انتگرالگیری).

۳- تبدیل لاپلاس $f(t)=\sin at$ را بیابید (روش انتگرالگیری).

۴- تبدیل لاپلاس توابع زیر را بدست آورید

1) $6\sin 2t - 5\cos 2t$ 2) $2e^{3t} - \sin 5t + 1$

3) $t^2 - \sinh(3t)$ 4) $t^5 + 3\cos 2t$

5) $3\sin 2t + 10$ 6) $e^{-t} + \cosh(4t)$

5- تبدیل معکوس های زیر را بیابید.

1) $F(s)=\dfrac{2}{s}$ 2) $F(s)=\dfrac{6}{s^3}$

3) $F(s)=\dfrac{2}{s^3}$ 4) $F(s)=\dfrac{5}{s-6}$

5) $F(s)=\dfrac{s}{s^2-9}$ 6) $F(s)=\dfrac{5}{s^2+25}$

7) $F(s)=\dfrac{s+12}{(s+3)^2}$ 8) $F(s)=\dfrac{s+2}{s^2-4s+4}$

9) $F(s)=\dfrac{2s-7}{s^2-4s+4}$ 10) $F(s)=4\dfrac{s}{s^2+3}$

$e^{2t}(2-3t)$ $4\cos\sqrt{3}t$

مثال: تابع $f(t)$ برای $0<t<\infty$ به صورت زیر تعریف شده است:

$$f(t)=\begin{cases} 0 & 0\leq t\leq \pi \\ \sin t & \pi<t\leq 2\pi \\ 0 & 2\pi\leq t \end{cases}$$

تبدیل لاپلاس $f(t)$ را به دست آورید.

حل: می‌توان نوشت:

$$f(t)=[u(t-\pi)-u(t-2\pi)]\sin t$$

92

$$f(t)=-u(t-\pi)\sin(t-\pi)-u(t-2\pi)\sin(t-2\pi)$$

$$L(u_c(t)\ f(t-c))=e^{-cs}L(f(t))=e^{-cs}F(s)$$

بنابراین با استفاده از قضیه انتقال داریم:

$$L[f(t)]=-L[u(t-\pi)\sin(t-\pi)]-L[u(t-2\pi)\sin(t-2\pi)]$$

$$=-e^{-\pi s}L[\sin t]-e^{-2\pi s}L[\sin t]=-\frac{e^{-\pi s}}{s^2+1}-\frac{e^{-2\pi s}}{s^2+1}\ ,\quad s>0$$

مثال: جواب مسأله مقدار اولیه زیر را بیابید:

$$x''+4x=f(t)\ ,\quad x(0)=x'(0)=0$$

$$f(t)=\begin{cases} 1 & 0\leq t<1 \\ 0 & t\geq 1 \end{cases}$$

حل: معادله را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$x''+4x=\overbrace{1-u(t-1)}^{f(t)}$$

حال از دو طرف تبدیل لاپلاس می‌گیریم:

$$L[x''] + 4L[x] = L[1] - L[u(t-1)]$$

بافرض $L[x(t)] = X(s)$ ، داریم:

$$s^2 X(s) - s\,x(0) - x'(0) + 4X(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-s}}{s}$$

واز آنجا:

$$X(s) = \frac{1}{s(s^2+4)} - \frac{e^{-s}}{s(s^2+4)}$$

داریم:

$$\frac{1}{s(s^2+4)} = \frac{\frac{1}{4}}{s} - \frac{\frac{1}{4}}{s^2+4}\,s$$

لذا:

$$X(s) = \frac{1/4}{s} - \frac{1/4}{s^2+4}\,s - \frac{1/4\,e^{-s}}{s} + \frac{1/4\,s\,e^{-s}}{s^2+4}$$

حال با بدست آوردن تبدیل معکوس توابع طرف راست واستفاده از قضیه انتقال داریم:

$$x(t) = \frac{1}{4}\left(1 - \cos 2t - u(t-1) + u(t-1)\cos 2(t-1)\right)$$

که جواب مسأله مقدار اولیه داده شده است و می‌توان آن را به صورت زیر نوشت:

$$x(t) = \begin{cases} 1/4\,[1 - \cos 2t] & 0 \le t < 1 \\ 1/4\,[\cos(2t-2) - \cos 2t] & t \geq 1 \end{cases}$$

این جواب برای $t \geq 0$ پیوسته و مشتق پذیر است وهمچنین در شرایط $x(0) = x'(0) = 0$ صدق می‌کند.

Subject: Date:

تمرین:

۱. تبدیل لاپلاس توابع داده شده را بدست آورید:

1. $f(t) = \cos^2 at$

2. $\sin^2 at$

3. $f(t) = \sinh at$

4. $\cosh at$

5. $t^2 e^{3t}$

6. $3t - 1 + \cosh 2t$

7. $f(t) = e^t \cos t$

8. $f(t) = t \sinh t$

9. $f(t) = e^{3t} \cos 2t - e^t \sin 5t$

10. $f(t) = \int_0^t e^x \cos 2x \, dx$

11. $f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 1 \\ -1 & 1 \leq t < 2 \\ 0 & 2 \leq t \end{cases}$

۲. تبدیل معکوس توابع داده شده را بدست آورید.

1. $F(S) = \dfrac{4}{S^2 + S - 6}$

2. $F(S) = \dfrac{S+3}{S^3 - S}$

3. $F(S) = \dfrac{4}{(S+3)^6}$

4. $F(S) = \dfrac{S}{S^2 - 2S + 26}$

DATA

(۶)

Subject: Date:

5. $\frac{1}{(s^2-1)^2}$ 6. $\frac{2a^2}{(s^2+a^2)^2}$

3. به کمک تبدیل لاپلاس، انتگرالهای زیر را محاسبه کنید.

1. $\int_0^\infty \frac{\cos(xt)}{1+t^2}\,dt$

2. $\int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx \qquad (a>0\ ,b>0)$

3. $\int_0^\infty \frac{e^{-t}(1-\cos 2t)}{t}\,dt$

4. تابع $f(t)$ بصورت زیر تعریف شده است:

$$f(t)=\begin{cases} 0 & 0\leqslant t<\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2}\leqslant t<1 \\ 4 & 1\leqslant t<3 \\ \frac{5}{2} & 3\leqslant t \end{cases}$$

نمودار تابع را رسم کنید و آنرا برحسب تابع پله‌ای واحد بنویسید، و $L\{f(t)\}$ را محاسبه نمایید.

DATA

5. جواب مسایل مقدار اولیه زیر را به روش تبدیل لاپلاس بدست آورید

1. $x' + 2x = e^{-t}$ $\qquad x(0) = 2$

2. $x' + 3x = 0$ $\qquad \underbrace{x(\overset{0}{3}) = 1}$?

3. $x'' + 2x' + x = 2e^{-t}$ $\qquad x(0) = 3 \qquad x'(0) = -3$

4. $x'' + 2x' + x = te^{-t}$ $\qquad x(0) = 1 \qquad x'(0) = 2$

5. $x'' + 4x' + 5x = 39e^{t}\sin t$ $\qquad x(0) = -1 \qquad x'(0) = -1$

6. $x'' - 3x' + 2x = 24\cosh t$ $\qquad x(0) = 6 \qquad x'(0) = -3$

7. $x'' + 16x = 5\cos 4t$ $\qquad x(0) = x'(0) = 1$

6. تابع $f(t)$ را با استفاده از انتگرالهای تلفیقی بدست آورید

1) $f(t) = L^{-1}\left\{ \dfrac{1}{(s^2-1)^2} \right\}$

2) $f(t) = L^{-1}\left\{ \dfrac{1}{s^2(s^2+1)} \right\}$

3) $f(t) = L^{-1}\left\{ \dfrac{s}{(s^2+1)^2} \right\}$

4) $f(t) = L^{-1}\left\{ \dfrac{1}{(s-3)(s^2+1)} \right\}$

Subject: Date:

7. با استفاده از انتگرالهای تلفیقی، تبدیل لاپلاس توابع زیر را بدست آورید:

$$f(t)=\int_0^t (t-u)^2 \cos 2u \, du$$

$$f(t)=\int_0^t e^{2(t-u)} u^3 \, du$$

8. معادلات انتگرالی زیر را حل کنید:

$$x(t)=1+2\int_0^t \cos(t-u)\, x(u)\, du$$

$$x(t)+\int_0^t e^{t-u}\, x(u)\, du = 2t-3$$

$$x(t)=3-\int_0^t \sinh(t-u)\, x(u)\, du$$

9. جواب معادله دیفرانسیل-انتگرالی زیر را بدست آورید:

$$x'(t)+3x(t)+2\int_0^t x(u)\, du = 3 \qquad x(0)=1$$

DATA