بسم الله الرحمن الرحیم

# مدارهای الکتریکی ۱

## (بخش اول)

استاد عادلی

تهیه و تنظیم :
www.tbi-net.com

تمرین ۱۵٪ ۱۵ نمره   میان‌ترم ۳۰٪ ۳۰ نمره   پایان‌ترم ۵۵٪ ۵۵ نمره

مرجع: نظریه اساسی مدارها و شبکه‌ها چارلز دسور و ارنست کوه، ترجمه دکتر جبه دار

سرفصل‌ها:

۱ـ مدارهای فشرده و قوانین کیرشهف
۲ـ اجزاء مدار
۳ـ مدارهای ساده
۴ـ مدارهای مرتبه اول
۵ـ مدارهای مرتبه دوم
۶ـ خواص مدارهای LTI
۷ـ تجزیه و تحلیل واحدی شبکه
۸ـ مدارهای سه فاز

مباحث میان‌ترم، برای پایان‌ترم حذف می‌شوند

مدارهای فشرده و قوانین کیرشهف:

کمیت‌هایی که در مدار با آنها سروکار داریم: $i(t)$ ، $V(t)$ ، $p(t)$

جریان $i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$ → بار کولن، $dt$ → sec

ولتاژ $V(t) = \frac{dw}{dq}$ ژول

$$p(t) = \frac{dw}{dt} = \frac{dw}{dq} \times \frac{dq}{dt} = V(t)\,i(t) \qquad p(t) = V(t)\,i(t)$$

if $p(t) < 0$ توان تولید شده active
if $p(t) > 0$ توان مصرف شده passive

مدار الکتریکی: مجموعه‌ای است از اجزای الکتریکی (عناصر مدار)

انواع مدار: $\begin{cases} \text{مدارهای فشرده} \\ \text{مدارهای گسترده distributed} \end{cases}$

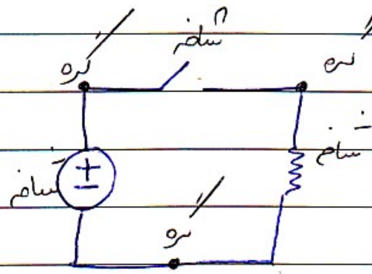

Subject:
Year. Month. Date.

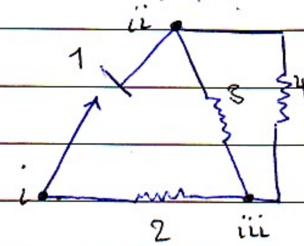
مدار فشرده: اندازه‌ی اجزا مدار بسیار کوچک‌تر از طول موج است.

مدارهای گسترده: اندازه‌ی اجزا مدار قابل مقایسه با طول موج است.

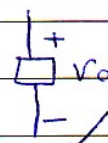
شاخه (Branch): هر عنصر الکتریکی دوسر (دوپایانه) را می‌توان یک شاخه در نظر گرفت.

گره: محلی است که دو یا چند شاخه با هم برخورد می‌کنند.

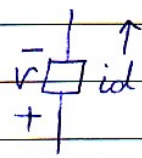



نحوه نمایش ولتاژ :



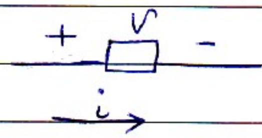

نحوه نمایش جریان :



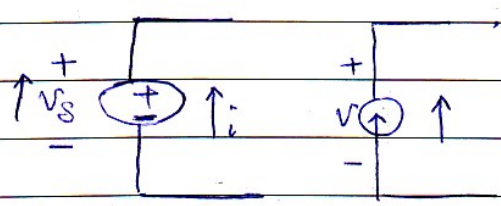

نکته: جهت‌های در نظر گرفته برای ولتاژ و جریان مستقل از هم هستند.

جهت‌های قراردادی مصرف‌کننده :

$p(t)=v(t)\times i(t)$




برای منابع ← جهت‌های قراردادی برعکس اند.




قوانین مدار :

قوانین کیرشهف : در مدارهای فشرده معتبرند.

قانون جریان کیرشهف (KCL) : در هر گره از مدار الکتریکی فشرده، جمع جبری جریان‌های ورودی

۱) در اجرای قانون دوم کیرشهف اگر در جهت جریان از قطب مثبت عبور کنیم کاهش ولتاژ داریم و بالعکس.
۲) 〃 〃 〃 〃 اگر از منفی به مثبت برسیم افزایش ولتاژ داریم و بالعکس.

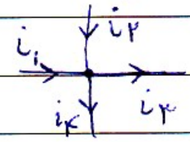
Subject:
Year. Month. Date.

(و یا خروجی) برابر صفر است. $\sum_{K} i_K(t)=0$

قانون ولتاژ کیرشهف (KVL):

در هر حلقه از مدار الکتریکی بسته، مجموع جبری ولتاژها برابر صفر است. $\sum v(t)=0$

مثال)



$i_4+i_3-i_1-i_2=0$

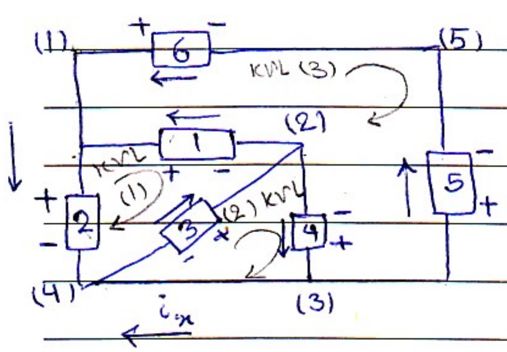
مجموع جریان‌های خروجی

$i_1+i_2-i_4-i_3=0$ مجموع جریان‌های ورودی

$\Rightarrow i_1+i_2=i_3+i_4 \Leftarrow$ جمع جبری جریان‌های ورودی = جمع جبری جریان‌های خروجی

قرارداد: برای راحتی، جریان‌های ورودی را مثبت می‌گیریم و جریان‌های خروجی را منفی در نظر می‌گیریم.

مثال)




KCL (1): $i_6-i_2+i_1=0$
KCL (2): $i_3-i_4-i_1=0$
KCL (3): $i_4-i_5-i_x=0$
KCL (4): $i_2+i_x-i_3=0$ $\rightarrow i_4-i_5+i_2-i_3=0$
KCL (5): $i_5-i_6=0$

$i_2-i_3+i_4-i_5=0$

برای حلقه‌هایی KVL می‌نویسیم که درون آنها حلقه‌ی دیگری نباشد. ⟵ mesh

جهت حلقه: جهت عقربه‌های ساعت

قرارداد: اگر جهت عقربه با جهت قرارداد عناصر یکی بود، ولتاژ آنها مثبت و در غیر این صورت ولتاژ آن‌ها منفی است.

$$\begin{cases} KVL\ (1):\ -V_2 + V_1 + V_3 = 0 \\ KVL\ (2):\ -V_3 - V_4 = 0 \\ KVL\ (3):\ V_6 - V_5 + V_4 - V_1 = 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} KVL\ (1) \\ KVL\ (2) \end{matrix}\right\} \longrightarrow -V_2 + V_1 - V_4 = 0$$

خاص رابطه‌ی زیادی را

مسأله را حل می‌کند.

RCL : مدارات فشرده

مدارهای فشرده و گسترده :

۱ ← از لحاظ فیزیکی تفاوتشان در طول موج مدار است.

## فصل دوم : اجزاء مدار

۱ـ مقاومت　　۲ـ خازن　　۳ـ سلف　　۴ـ منابع و عناصر دیگر

۱ـ مقاومت : Resistor مقاومت عنصری است که در هر لحظه از زمان ولتاژ دو سر آن $v(t)$ و جریانی که از آن می‌گذرد $i(t)$ در صفحه‌ی $v - i$ تشکیل یک منحنی می‌دهند، این منحنی، مشخصه را تعیین می‌کنند.

۱ـ خطی بودن　　۲ـ تغییرپذیری با زمان

$$x(t) \xrightarrow{\quad} y(t)$$

خطی ← $\left\{\begin{matrix} \text{۱ـ جمع‌پذیری} \\ \text{۲ـ همگن} \end{matrix}\right.$

$$\begin{cases} x_1(t) \to y_1(t) \\ x_2(t) \to y_2(t) \end{cases}$$

جمع‌پذیری : $x_1(t) + x_2(t) \to y_1(t) + y_2(t)$

همگن : $\alpha x_1(t) \to \alpha y_1(t)$

مشخصه‌ی یک سیستم خطی یک خط است که از مبدأ بگذرد.

$y(t) = 2x(t) + 1$ غیرخطی است

$$x_1(t) \longrightarrow \begin{cases} y_1(t) = 2x_1(t) + 1 \\ y_2(t) = 2x_2(t) + 1 \end{cases} \longleftarrow x_2(t)$$

$x_1(t) + x_2(t) \longrightarrow y_?(t) = 2\big(x_1(t) + x_2(t)\big) + 2 \longrightarrow$ خطی نیست.

$y(t) = 2x(t) \rightarrow$ خطی        $y(t) = \sin t \; x(t) \rightarrow$ خطی تغییرپذیر با زمان

- اگر داشتیم $y(t) = t x(t)$ تغییرپذیر با زمان می‌شود.
- اگر $t$ به صورت صریح در رابطهٔ خروجی وجود داشته باشد تغییرپذیر با زمان است.

برای المان‌ها ۴ حالت پیش می‌آید:

1) linear _ time invariant → LTI    خطی ـ تغییرناپذیر با زمان

2) " _ " Variant

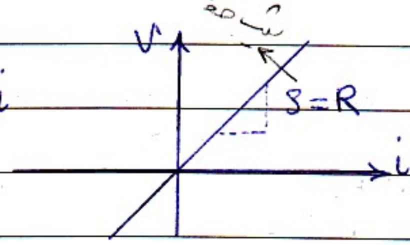
3) Nonlinear _ " invariant

4) " _ " Variant

۱ـ مقاومت خطی تغییرناپذیر با زمان: (LTI)

اهم ← $\Omega$

$v = Ri$

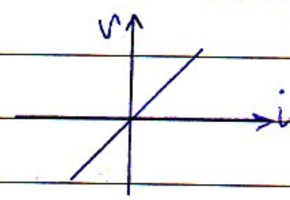



تمرین سری اول از فصل ۱ کتاب ۵ـ۶ـ۷ـ۱۳

تاریخ تحویل: ۸۶/۷/۱۴

رسانایی $G \triangleq \frac{1}{R} \quad \frac{v}{S}$ mho آهو    واحد رسانایی = زیمنس یا mho

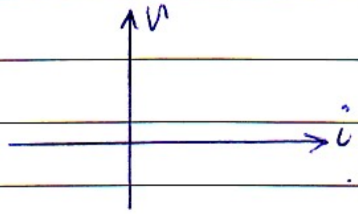
۱ـ مقاومت LTI:




$v = Ri$

مقاومت

حالت خاص:

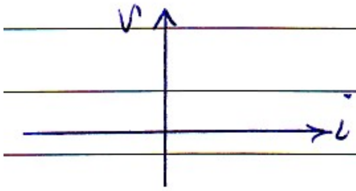



۱) $R=0$ ← اتصال کوتاه short circuit

$G=\infty$

$v=0$

منطبق بر محور افقی است.




۲) مدار باز $R=\infty$ open circuit

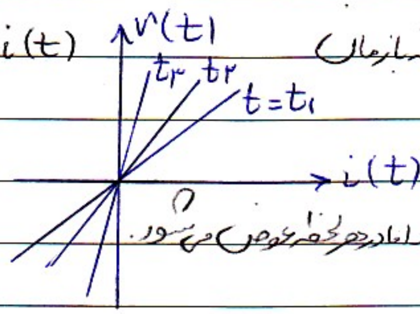
منطبق بر محور عمودی

$G=0$ $i=0$
$v=\cdot$

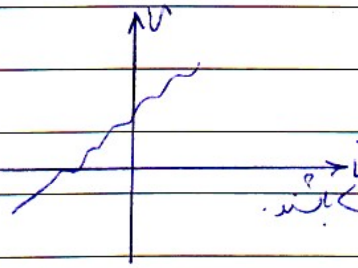
۲- مقاومت خطی وابسته به زمان

$$v(t)=R(t)\,i(t)$$

← تابعی غیرخطی از زمان باشد.




مقاومت خطی از مبدا می‌گذرد اما در هر لحظه عوض می‌شود.




۳- مقاومت های غیرخطی:

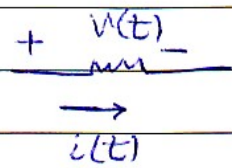
می‌توانند هم تغییرپذیر و هم تغییرناپذیر با زمان باشند.

$$v(t)=f\left(i(t),t\right)$$

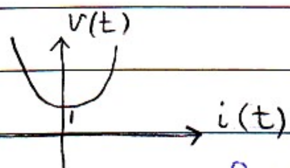
غیرخطی

اگر $t$ بصورت صریح در رابطه فوق وجود داشته باشد ← تغییرپذیر با زمان

گونه نمایش مقاومت:




مثال) $v(t)=i^2(t)+1$



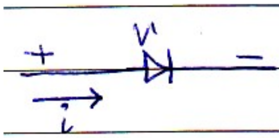

۱) آیا خطی است؟ خیر

۲) آیا تغییرناپذیر با زمان است؟ بله

یا اگر $t$ بصورت صریح در رابطه وجود ندارد

۲- دیود $i=I_S\left(e^{\frac{v(t)}{V_T}}-1\right)$

$V_T=25\,mV$




← جریان اشباع معکوس

رابطه جریان و ولتاژ یک رابطه نمایی است، پس غیرخطی است ولی تغییرناپذیر با زمان.

مثال) $v(t)=2\,t\,i(t)$ تغییرپذیر با زمان - خطی است چون می‌توان رابطه را به صورت زیر نوشت

$v(t)=R(t)\,i(t)$

اثبات خطی بودن رابطه بالا:

$i_1(t)\to v_1(t)=2t\,i_1(t)$

$i_2(t)\to v_2(t)=2t\,i_2(t)$

$i_1+i_2\to v_3=2t(i_1+i_2)=2t\,i_1(t)+2t\,i_2(t)$

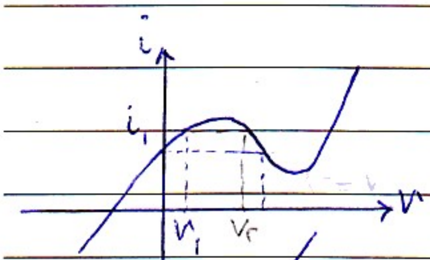
خاصیت اول برقرار است ← $\widetilde{v_1(t)}+v_2(t)$

اگر دو ویژگی برقرار باشد سیستم خطی است:

$$\begin{matrix} x_1\to y_1 \\ x_2\to y_2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 1)\ x_1+x_2\to y_1+y_2 \\ 2)\ \alpha x_1\to \alpha y_1 \end{cases}$$

بررسی خاصیت دوم: $\alpha\, i_1(t)\to v_4(t)$ $\quad v_4(t)=2t(\alpha\, i_1(t))=\alpha(2t\,i_1(t))=\alpha v_1(t)$

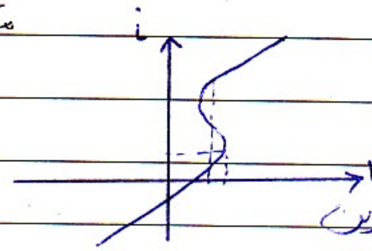
← خاصیت دوم هم برقرار است پس سیستم خطی است.




کنترل شونده با ولتاژ و جریان:

۱- کنترل شونده با ولتاژ: به ازای یافتن جریان، داشتن ولتاژ کافی است ولی عکس آن صادق نیست.

$i=f(v)$ متغیر مستقل




۲- کنترل شونده با جریان:

$v=f(i)$ متغیر مستقل

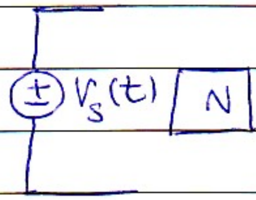
به ازای یک ولتاژ ممکن است چندین جریان وجود داشته باشد.

داشتن i برای یافتن v کافی است ولی عکس آن صادق نیست.

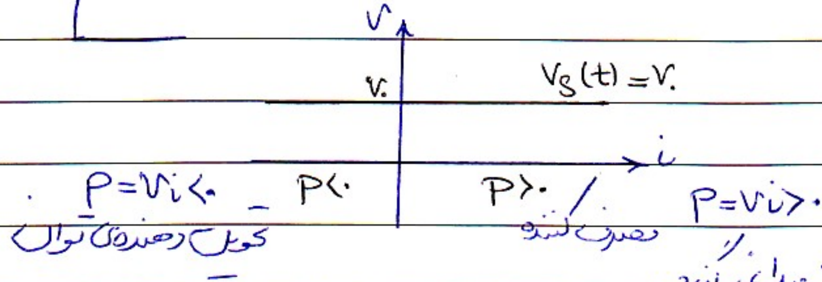
$v(t)=i^2+4i+3$ کنترل شونده با جریان

منابع { ۱- مستقل (نابسته)
۲- وابسته (کنترل شده)

۱- منبع ولتاژ مستقل: عنصری است که دو سر آن ولتاژ معینی را در روی مدار خود تأمین می‌کند. این منبع مستقل از مداری است که به آن متصل شده است.

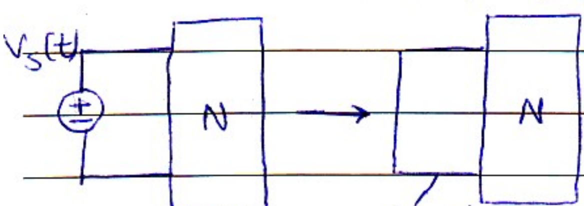



مثال) منبع ولتاژ مستقیم dc

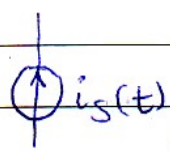



در حالت کلی غیر خطی است چون از مبدأ نمی‌گذرد.
به ازای هر جریان، ولتاژ ثابت است ⇐ کنترل شونده با جریان

استثناء: اتصال کوتاه
نکته: حذف منبع ولتاژ ($V=0$) در مدار معادل با اتصال کوتاه کردن آن است.

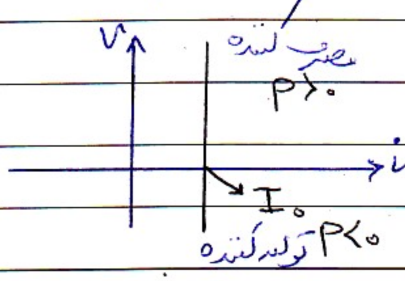



۲- منبع جریان مستقل: عنصری است که در سر آن جریان معینی را تأمین می‌کند.
این منبع مستقل از مداری است که به آن متصل است.



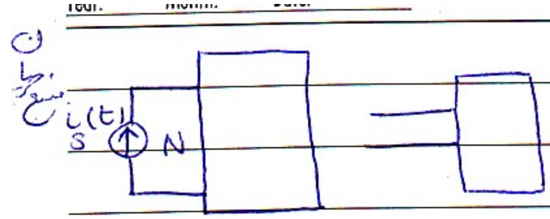

استثناء: مدار باز (جریانی ایجاد نمی‌شود)

مثال) منبع جریان مستقیم dc : $i_S(t)=I_0$




غیر خطی ـ کنترل شونده با ولتاژ ـ تغییرپذیر با زمان

نکته: حذف منبع جریان در مدار معادل باز کردن آن است.




منابع وابسته:

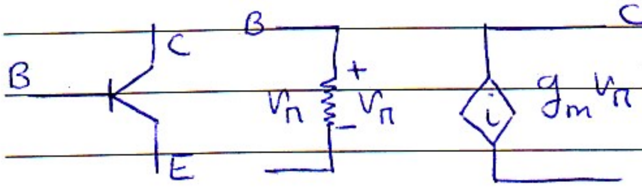
۱- منبع ولتاژ وابسته: این منبع وابسته به ولتاژ یا جریان یک عنصر دیگر است. $v_s(t)$

$$v_s(t)=f\left(v(t),i(t),t\right)$$

۲- منبع جریان وابسته: وابسته به جریان یا ولتاژ یک عنصر دیگر است.

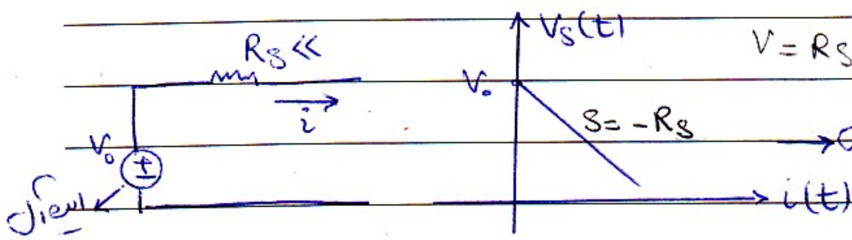
$$i_s(t)=f\left(v(t),i(t),t\right)$$

مثال) منبع جریان وابسته:

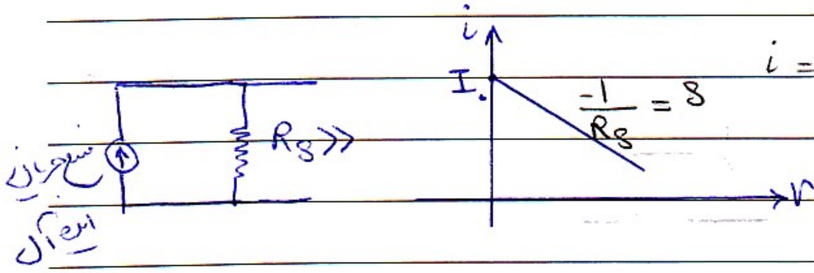



منبع ولتاژ واقعی: $V=R_s i$

مدل یک منبع واقعی →

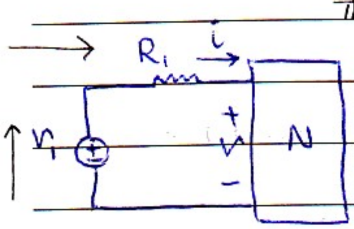



منبع جریان واقعی: $i=\frac{1}{R_S}v$

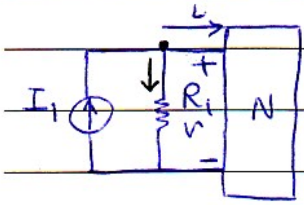



تبدیل منابع:

معادل‌های تونن و نورتن: Thevenin & Norton Equivalents



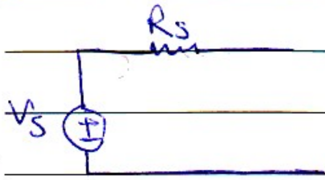

$v=v_1-R_1 i \quad (1)$



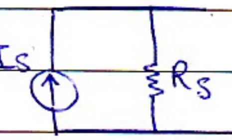

KCL

$I_1 - \frac{V}{R_1} - i = 0 \longrightarrow V = R_1 I_1 - R_1 i \quad (۲)$

$(۱) , (۲) \quad V_1 - R_1 i = R_1 I_1 - R_1 i \longrightarrow V_1 = R_1 I_1$




≡ معادل




$I_S = \frac{V_S}{R_S}$

معادل تونن　　　　معادل نورتن

توابع متداول در تجزیه و تحلیل مدارها :

۱_ $f(t) = k$　　K عدد ثابت

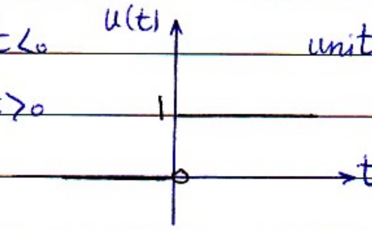
۲_ تابع سینوسی　$f(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$　　A دامنه Amplitude

فرکانس $\omega = 2\pi f$　　φ فاز phase

۳_ تابع پله واحد　unit step function

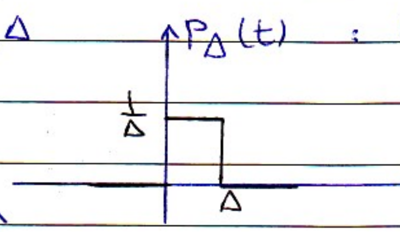
$u(t)$

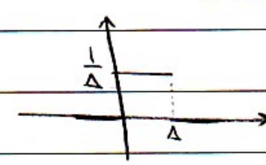
$$f(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ 1 & t>0 \end{cases}$$




۴_ تابع پالس : (pulse)

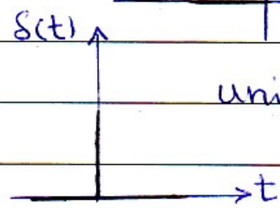
$$P_\Delta(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta} & 0<t<\Delta \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$




۵_ تابع ضربه واحد : unit impulse function

$$\delta(t) = \lim_{\Delta \to 0} P_\Delta(t)$$




خواص $\delta(t)$ :

سطح زیر منحنی ۱　(۱ $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,dt = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t)\,dt = 1$

Subject:

Year. Month. Date.

$$u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\lambda)\,d\lambda$$

$$r(t)=\int_{-\infty}^{t}u(\lambda)\,d\lambda$$

روابط مشتق و انتگرال تابع $u(t)$

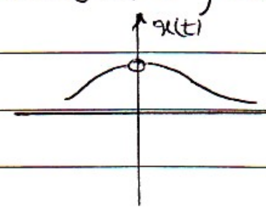
$$\left.\begin{aligned} &۲)\ u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\lambda)\,d\lambda \\ &۳)\ \delta(t)=\frac{du(t)}{dt}\end{aligned}\right\}$$

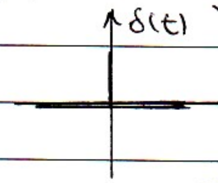
تمرین) ثابت کنید:

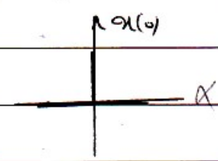
$$\begin{cases} x(t)\,\delta(t)=x(0)\,\delta(t) \longrightarrow ? \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,\delta(t)\,dt = x_0 \longrightarrow \text{ابتدا} \end{cases}$$

$$\underbrace{\int x(t)\,\delta(t)}_{x_0}=\int x(0)\,\delta(t) \quad x_0\underbrace{\int\delta(t)}_{1} \Rightarrow x_0=x_0$$

$$\int x(t)\,\delta(t)=\int x(0)\,\delta(t)\,dt=x(0)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\,dt=x(0)\,\cancel{\delta(t)}$$

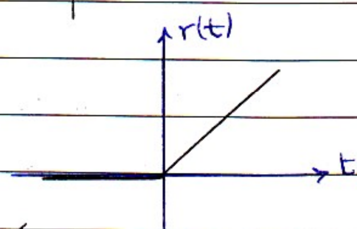



۴- تابع شیب واحد:

$$r(t)=\begin{cases} t & t\geq 0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$$

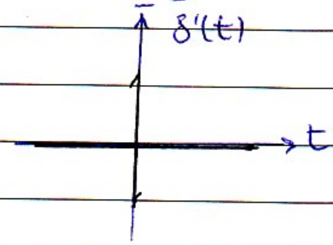


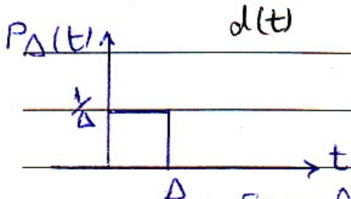

تمرین) رابطه‌ی بین $r(t)$ و $u(t)$ را بدست آورید؟ $r(t)$ انتگرال از تابع پله

$$r(t)=\int_{-\infty}^{t}u(\lambda)\,d(\lambda)$$

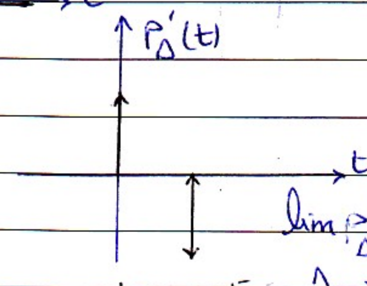
۵- تابع دوبلت

$$\delta'(t)=\frac{\delta(t)}{d(t)}$$

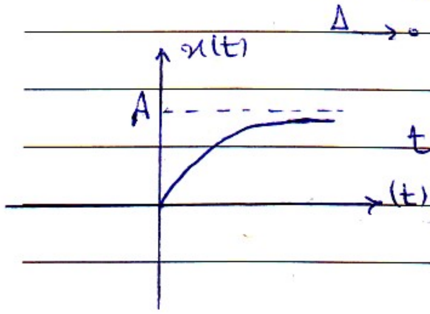



$$\delta(t)=\lim_{\Delta\to 0}P_\Delta(t)$$

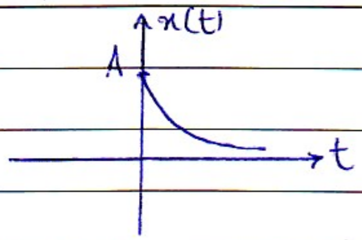



$$\lim_{\Delta\to 0}P'_\Delta(t)$$




۸- تابع نمایی

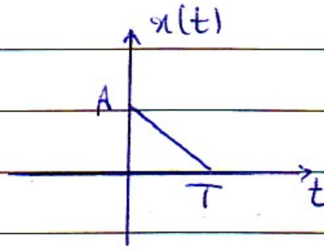
$$t>0 \quad x(t)=A\left(1-e^{-t/\tau}\right) \quad t>0$$

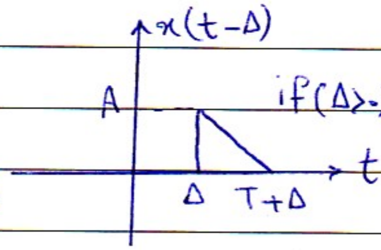


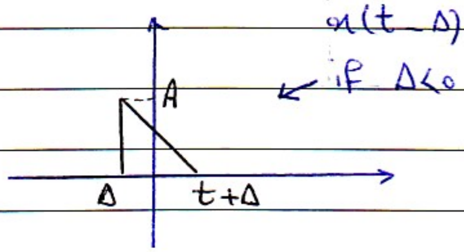

$$x(t) = A e^{-t/\tau}$$

تبدیلات توابع :

۱ـ انتقال تابع یا Shifting if$(\Delta>0)$

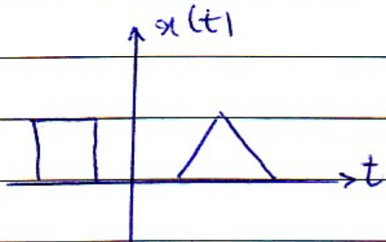


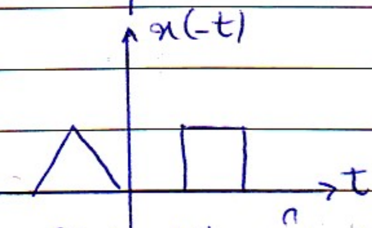




۲ـ معکوس کردن تابع یا Time invertion

$x(t) \rightarrow x(-t)$

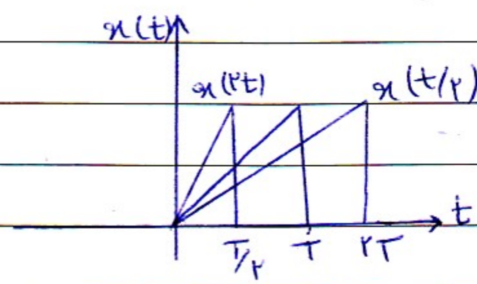



۱۸۰ درجه چرخش حول محور عمودی

۳ـ Scaling $x(t) \rightarrow x(at)$

$$\text{if}\begin{cases} a>1 \rightarrow \text{فشرده سازی} \\ a<1 \rightarrow \text{گسترده سازی} \end{cases}$$

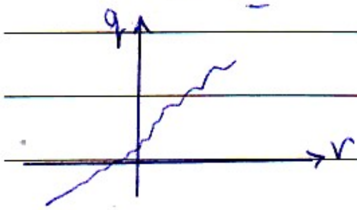


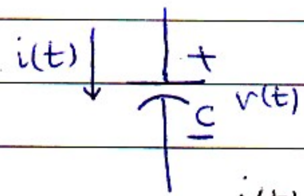

مثال های ۱ و ۲

در ۴۷ و ۴۸

## خازن capacitor

عنصری است دوپایانه که رابطه ولتاژ ($v(t)$) و بار ذخیره شده در آن $q(t)$ در هر لحظه توسط یک منحنی در صفحه $v$-$q$ می‌دهند.




→ نحوه نمایش خازن

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$$

خواص: ۱- خطی بودن

۲- تغییرناپذیر با زمان بودن

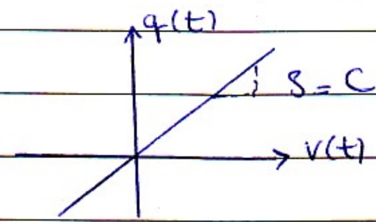
۱- خازن خطی تغییرناپذیر با زمان (LTI):

$q(t) = C\,v(t)$ ولت

کولن (کولمب)

C: ظرفیت خازن (فاراد)

$1F = 1\,\frac{C}{V}$




$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(C\,v(t)\right) = C\,\frac{dv}{dt} \qquad i(t) = C\,\frac{dv}{dt}$$

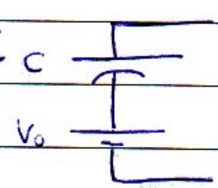
$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{C}\,i(t) \longrightarrow dv = \frac{1}{C}\,i(t)\,dt \longrightarrow \int_{t_0}^{t} \Rightarrow v(t) - v(t_0) = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(t)\,dt$$

$$v(t) = v(t_0) + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\lambda)\,d\lambda$$

اگر $t_0 = 0$ و $v(0) \triangleq V_0$:

$$v(t) = V_0 + \frac{1}{C}\int_{0}^{t} i(\lambda)\,d(\lambda)$$

مدل سازی یک خازن با بار اولیه:




نکات مهم:

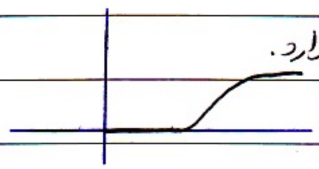
۱- خازن در مقابل جریان DC مثل مدار باز عمل می‌کند.

جریان DC = جریان مستقیم

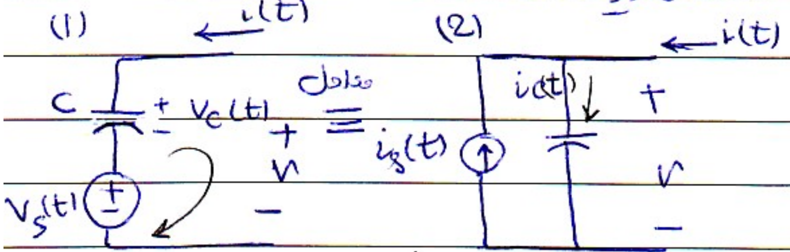
$v(t^-) = v(t^+)$

۲- ولتاژ خازن پرش ندارد مگر اینکه جریان آن ضربه داشته باشد.

$\delta(t)$




۳- برای یک خازن LTI با بار اولیه صفر مدارهای زیر معادلند:




$$i_s(t) = C\frac{dv_s(t)}{dt}$$

$(1):\ -v_s(t) - v_C(t) + v(t) = 0$

$$v(t) = v_s(t) + v_C(t)$$

$(1):\ v(t) = v_s(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(t)\,dt$

$(2):\ KCL:\ i(t) + i_s(t) = i_C(t)$

$$i(t) = C\frac{dv_s(t)}{dt} + i(t) = C\frac{dv_C}{dt} \xrightarrow{\int C} v_s(t) + \int i_s(t)\,dt =$$

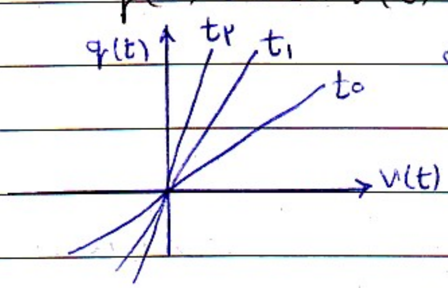
$v_s = v_C = v$

$$C(v_C(t) - v_C(0)) \Rightarrow v_C(t) = v_s(t) + \frac{1}{C}\int i_s(t)\,dt$$

خازن خطی تغییرپذیر با زمان:

$$q(t) = C(t)\,v(t)$$

$C(t)$ تابع مشخص از زمان




$$i(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}\left(C(t)\,v(t)\right)$$

$$i(t) = C(t)\frac{dv}{dt} + v(t)\frac{dC}{dt}$$

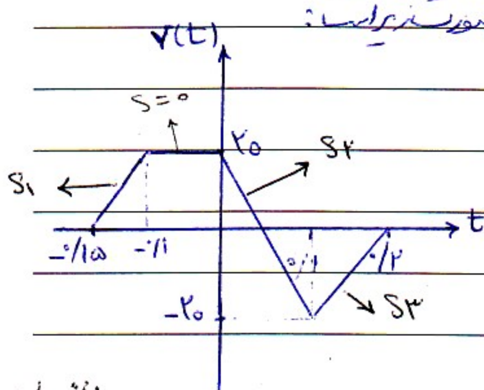
توابع غیرخطی : $q(t) = f\left(v(t), t\right)$

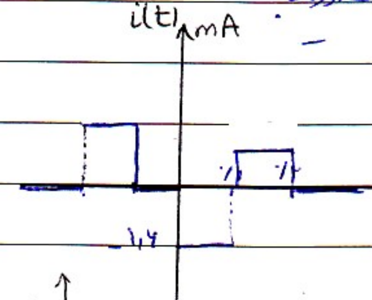
اگر $t$ به صورت صریح وجود داشت تغییرپذیر با زمان، در غیر این صورت نه. ← غیرخطی

مثال) برای یک خازن $C = 4\mu F$ ولتاژ برحسب زمان به صورت زیر است:

الف) شکل جریان

ب) منحنی توان خازن را بدست آورید؟




$$i(t) = C\frac{dv}{dt}$$

$$v(t) = S_1 t + \alpha$$

$$\frac{dv}{dt} = S_1 \longrightarrow \text{شیب}$$

$$\text{شیب}\ S_1 = \frac{20}{0/05} = 400$$

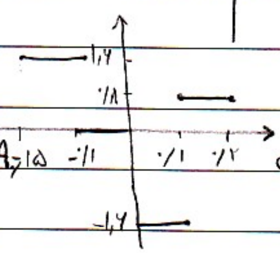
$$CS_1 = 400 \times 4 \times 10^{-6} = 1600 \times 10^{-6} = 1/6\ mA$$

میلی آمپر

$0 < t < 0/1$

$$\frac{dv}{dt} = S_2 = \frac{-40}{0/1} = -400$$

$$i = -400 \times 4 \times 10^{-6} = -1/6\ mA$$




$$\frac{dv}{dt} = S_3 = \frac{20}{0/1} = 200$$

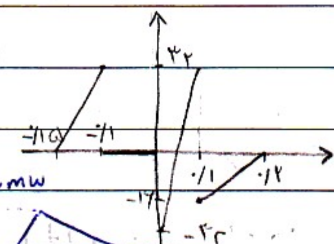
ب) منحنی توان :

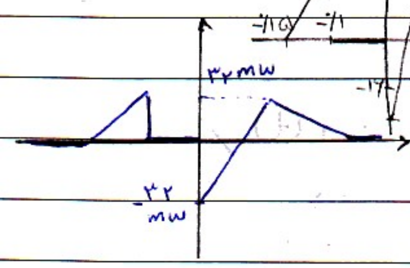
$$i = 200 \times 4 \times 10^{-6} = 800 \times 10^{-6} = 0/8\ mA \qquad p(t) = v(t)\, i(t)$$

$-0/15 < t < -0/1 \longrightarrow i_1 = 1/6\ mA \begin{cases} V_2 = 20 & P_2 = 32 \\ V_1 = 0 & P_1 = 0 \end{cases}$

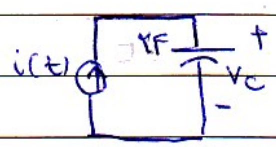
$0 < t < 0/1 \longrightarrow i_2 = -1/6\ mA \begin{cases} V_2 = -20 & P_2 = 32 \\ V_1 = 20 & P_1 = -32 \end{cases}$

$0/1 < t < 0/2 \longrightarrow i_3 = 0/8 \begin{cases} V_2 = 0 & P_2 = 0 \\ V_1 = -20 & P_1 = -16 \end{cases}$

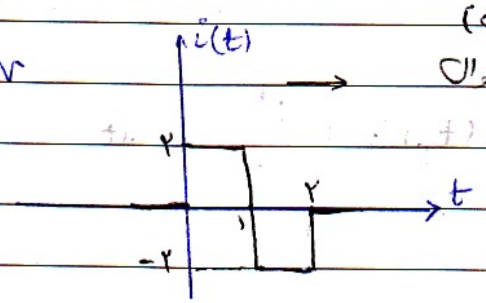



مثال) صورت سوال




$$V_C(0^-) = -\tfrac{1}{2}\ V$$



$$v_C(t) = v_C(t_0) + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\lambda)\,d\lambda$$

$$t_0 = 0 \longrightarrow v_C(t) = -\tfrac{1}{2} + \frac{1}{2}\int_0^t i(\lambda)\,d\lambda$$

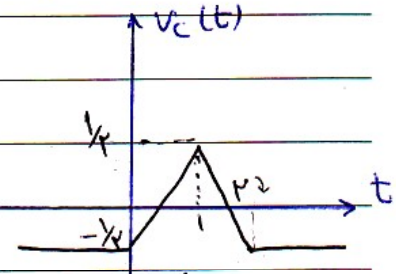
$$\text{if } 0 < t < 1 \quad v_C(t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\int_0^t 2\,d\lambda = t - \tfrac{1}{2}$$

$$v_C(1^-) = 1 - \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}$$

$$1 < t < 2 \quad v_C(t) = v_C(1) + \frac{1}{2}\int_1^t i(\lambda)\,d\lambda = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\int_1^t (-2)\,d\lambda = \tfrac{3}{2} - t$$

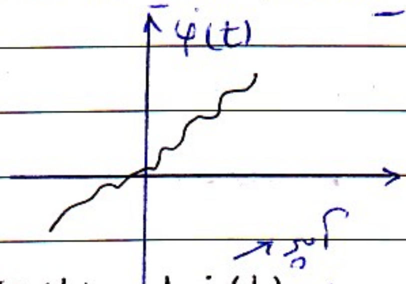
$$v_C(2) = \tfrac{3}{2} - 2 = -\tfrac{1}{2}$$

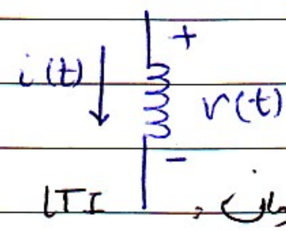
$$t > 2 \longrightarrow v_C(t) = v_C(2) + \frac{1}{2}\int_2^t (0)\,d\lambda = -\tfrac{1}{2}$$




سلف (القائی):

تعریف: سلف عنصری است دو پایانه که بین شار مغناطیسی $\varphi(t)$ و جریان آن $i(t)$ در هر لحظه از زمان در صفحه $\varphi - i$ تشکیل یک منحنی می‌دهند




$$v(t) = \frac{d\varphi}{dt}$$

سلف خطی تغییرناپذیر با زمان:

$$\varphi(t) = L\, i(t)$$

آمپر

اندوکتانس

واحد شار: وبر wb

واحد اندوکتانس: هانری H

$$1\,H \triangleq 1\,\frac{wb}{A}$$

$$v(t) = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d}{dt}\left(L\,i(t)\right) = \frac{L\,d(i(t))}{dt} \qquad v(t) = L\,\frac{d(i(t))}{dt}$$

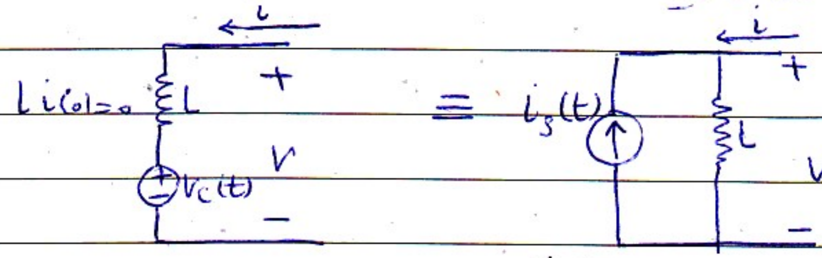
$$i(t) = i(t_0) + \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v(t)\,dt$$

خواص سلف LTI :

۱ـ اگر جریان سلف dc باشد ← سلف مانند اتصال کوتاه عمل می‌کند.

۲ـ جریان سلف نمی‌تواند جهش داشته باشد مگر اینکه ولتاژ آن دارای ضربه باشد $\qquad i_L(t^-)=i_L(t^+)$

۳ـ برای یک سلف با $i_L(0)=0$ مدارهای زیر معادلند :




$$V_S(t)=L\frac{di_S(t)}{dt}$$

سلف خطی تغییرپذیر با زمان :

$$\varphi(t)=L(t)\,i(t)$$

$$v(t)=\frac{d\varphi}{dt}=\frac{d}{dt}\big(L(t)\,i(t)\big)=L(t)\frac{di(t)}{dt}+i(t)\frac{dL(t)}{dt}\longrightarrow v(t)=L(t)\frac{di(t)}{dt}+i(t)\frac{dL(t)}{dt}$$

سلف‌های غیرخطی :

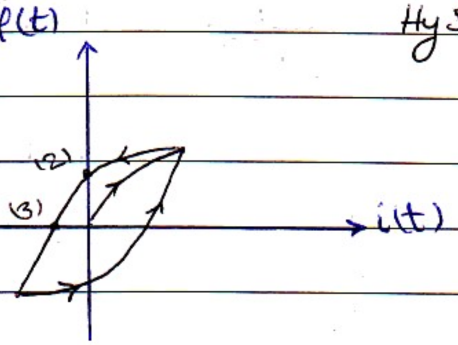
غیرخطی

$$\varphi(t)=f\big(i(t),t\big)$$

اگر t بصورت صریح وجود داشته باشد ← تغییرپذیر با زمان

« « « « نداشته « ← تغییرناپذیر با زمان

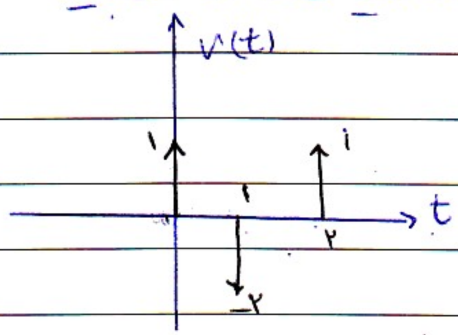
خاصیت هیسترزیس : Hysteresis




نقطه (۲) : شار پسماند

نقطه (۳) : جریان نیروی بازدارنده

مثال) به یک سلف با اندوکتانس $L=2H$ ، $i(t)=2A$ ولتاژ زیر اعمال می‌شود منحنی جریان سلف را بدست آورید؟




$$i(t)=i(t_0)+\frac{1}{L}\int_{t_0}^{t}v(\lambda)\,d\lambda$$

$$t_0=0 \longrightarrow i(t)=2+\frac{1}{2}\int_{0}^{t}v(\lambda)\,d\lambda$$

$$0^-<t<1^+ \quad i(t)=2+\frac{1}{2}\int_{0^-}^{0^+}\delta(t)+\frac{1}{2}\int_{0^+}^{t}(0)\,dt=$$

$$2+\frac{1}{2}=2/5$$

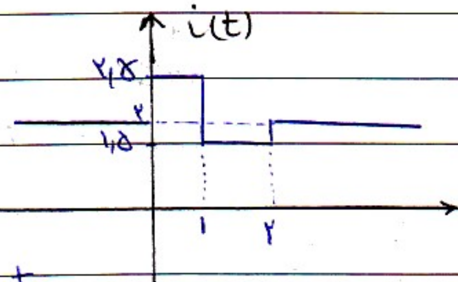
$1^-<t<2^-$

$$i(t)=i(1^-)+\frac{1}{2}\int_{1^-}^{2^-}v(\lambda)\,d\lambda=2/5+\frac{1}{2}\int_{1^-}^{1^+}-2\,\delta(t-1)\,dt+$$

$$\frac{1}{2}\int_{1^+}^{t}(0)\,d\lambda=2/5-1=1/5$$

$$t>2^- \quad i(2^-)=1/5 \quad i(t)=i(2^-)+\frac{1}{2}\int_{2^-}^{t}v(\lambda)\,d\lambda=$$

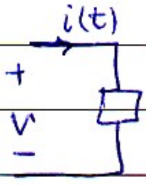
$$1/5+\frac{1}{2}\int_{2^-}^{2^+}\delta(\lambda-2)\,d\lambda+\frac{1}{2}\int_{2^+}^{t}(0)\,d\lambda$$




انرژی و توان - الکترون ولت؟

wat

$p(t)=v(t)\,i(t)$




جریان از سر مثبت شروع به حرکت کرده پس داریم $p(t)=v(t)i(t)$

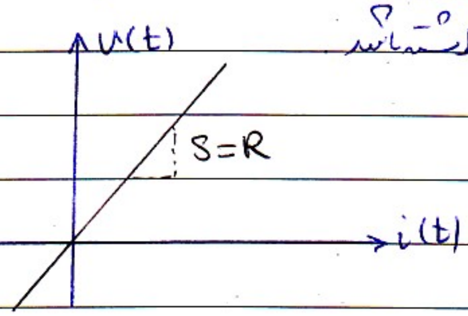
توان لحظه‌ای $P(t)$

ولی اگر از سر منفی حرکت می‌کرد داشتیم: $p(t)=-v(t)i(t)$

انرژی از $t_0$ تا $t$: $w(t_0, t) = \int_{t_0}^{t} p(\lambda)\, d\lambda$

اکتیو: عنصری است که امکان تحویل توان به مدار را داشته باشد.

پسیو: " " " " نداشته باشد




$$\begin{cases} p(t) = v(t)\, i(t) \\ v(t) = R\, i(t) \end{cases} \Rightarrow p(t) = R\, i^2(t)$$

یا

$$p(t) = \frac{v^2(t)}{R} > 0$$ مقاومت عنصر Passive

ممکن است غیرخطی باشد.

خازن، $v = f(q)$ $\quad i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$ $\quad p(t) = v(t)\, i(t)$

$$p(t) = f(q)\frac{dq}{dt} \qquad w(t_0, t) = \int_{t_0}^{t} p(t)\, dt = \int_{t_0}^{t} f(q)\, dq$$

برای خازن LTI: $q = cv \qquad f(q) = \frac{q}{c}$

$$w(t_0, t) = \int_{t_0}^{t} \frac{q}{c}\, dq = \frac{1}{2c}\left(q^2(t) - q^2(t_0)\right)$$

فرض $t_0 = 0$ ، $q(0) = 0$

$$w(0, t) = w(t) = \frac{1}{2c} q^2(t) = \frac{1}{2} c v^2(t)$$

سلف، $i = f(\varphi)$ $\quad p(t) = v(t)\, i(t) = \left(\frac{d\varphi}{dt}\right) i(t) =$

ممکن است غیرخطی

$$f(\varphi)\frac{d\varphi}{dt} \Rightarrow p(t) = f(\varphi)\frac{d\varphi}{dt}$$

$$w(t_0, t) = \int_{t_0}^{t} p(t)\, dt = \int_{t_0}^{t} f(\varphi)\, d\varphi$$

برای یک سلف خطی تغییرناپذیر با زمان:

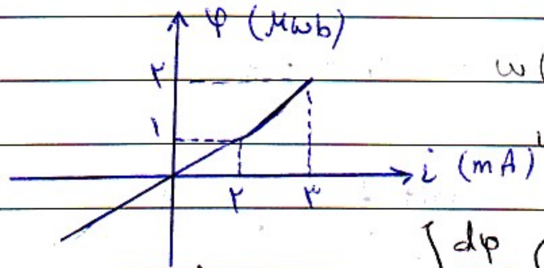
$$v(t) = L\frac{di}{dt}$$

$$\varphi(t) = L\,i(t) \qquad i(t) = \frac{\varphi(t)}{L} \longrightarrow f(\varphi) = \frac{\varphi(t)}{L}$$

$$w(t_0, t) = \int_{t_0}^{t} \frac{\varphi(t)}{L}\, d\varphi = \frac{1}{2L}\left(\varphi^2(t) - \varphi^2(t_0)\right)$$

$$w(t) = \frac{1}{2L}\varphi^2(t) = \frac{1}{2}L\,i^2(t) \qquad \varphi(0) = 0 \longrightarrow T_C = 0$$

مثال) مشخصه یک سلف غیرخطی به صورت شکل زیر است. انرژی ذخیره شده در سلف را از $i=0$ تا $i=3mA$ بدست آورید.

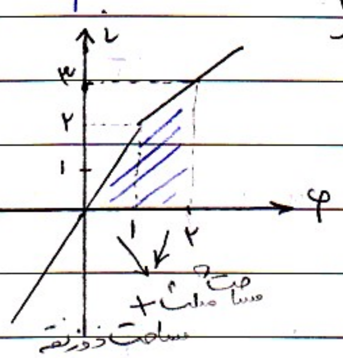



$$w(t_0, t) = \int_{t_0}^{t} p(t)\,dt = \int_{t_0}^{t} f(\varphi)\,d\varphi$$

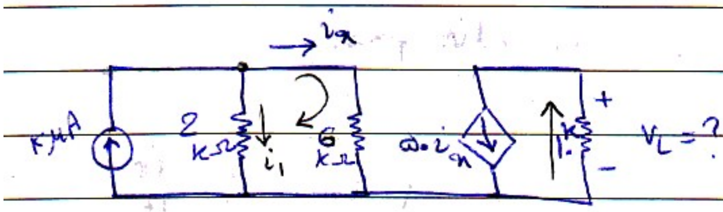
$$w(t) = \int p(t)\,dt = \int v(t)\,i(t)\,dt = \int \frac{d\varphi}{dt}\,(i(t))\,dt = \int_{t_0}^{t} i(t)\,d\varphi = ۳/۵$$

$$w(t) = \int_0^2 f(\varphi)\,d\varphi = ۳/۵ \times 10^{-9}$$

$$\varphi < 1 \qquad i(\varphi) = 2\varphi \qquad i(\varphi) = \varphi + 1 \qquad 1 < \varphi < 2$$




مثال) ولتاژ روبرو $V_L = ?$





$$-2i_1 + 6i_x = 0 \longrightarrow i_1 = 3i_x$$

$$KCL: \quad 4 = i_1 + i_x = 4i_x \longrightarrow i_x = 1\ \mu A$$

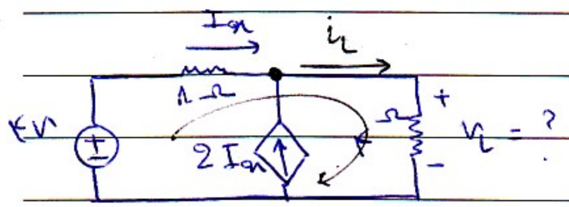
$$-V_L - 50\,i_x \times 10 = 0$$

$$-V_L = 50\,i_x \times 10$$

$$V_L = -50\,i_x \times 10$$

$V_L = (-50\, i_x)\, 10^{K} = -50\times10^{-6}\times10\times10^{3} = -0/5\, V$

مثال)

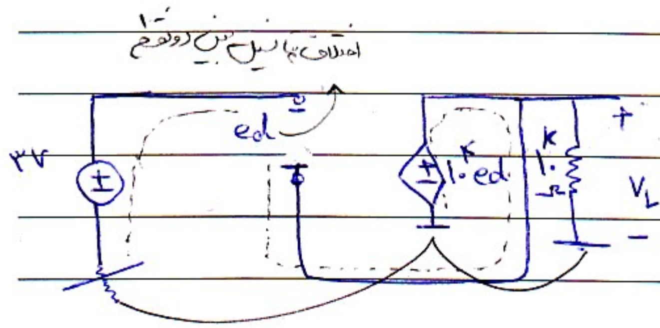



$KCL: \; I_x + 2I_x - i_L = 0 \longrightarrow i_L = 3 i_x$

$KVL: \; -4 + 8I_x + 4 i_L = 0$

$-4 + 8 I_x + 12 I_x = 0 \longrightarrow I_x = 1/5 \qquad V_L = 4 i_L = 12 I_x = 12\times\frac{1}{5} = 2/4$

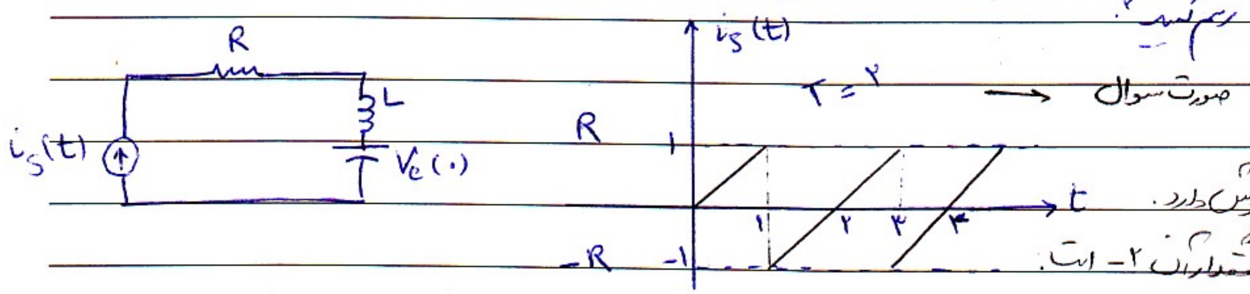
مثال)




$KVL: \; -3 - e_d + 10^{4} e_d = 0 \qquad (10^{4} - 1) e_d = 3 \longrightarrow e_d \simeq 10^{-4}\times 3$

$V_L = 10^{4} e_d = 10^{4}\times3\times10^{-4} \simeq 3\, V$

مثال) اگر $i_s(t)$ مطابق شکل زیر تغییر کند، ولتاژهای دو سر سلف و مقاومت و خازن را بدست آورید و رسم کنید.

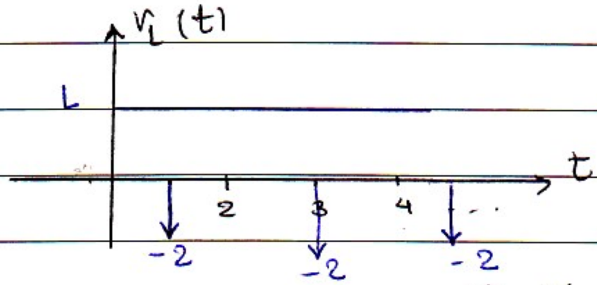


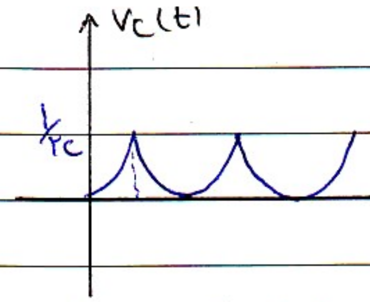

$V_R(t) = R\, i_s(t) \qquad i_s(t) = T$

$0 < T < 1 \qquad I(t) = T$

$V_R(T) = RT$

$V_L = L\,\dfrac{di_s}{dt}$



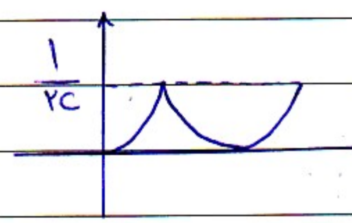




فصل دوم : ۵-۶-۹- ۱۱- ۱۲- ۱۵- ۱۹- ۲۴- ۲۸

$$v_C(t) = v_C(t_0) + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i_s(\lambda)\, d\lambda$$

$$v_C(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i_s(\lambda)\, d\lambda \Rightarrow 0<t<1 \longrightarrow v_C(t) = \frac{1}{C}\int_0^t \lambda\, d\lambda = \frac{t^2}{2C}$$

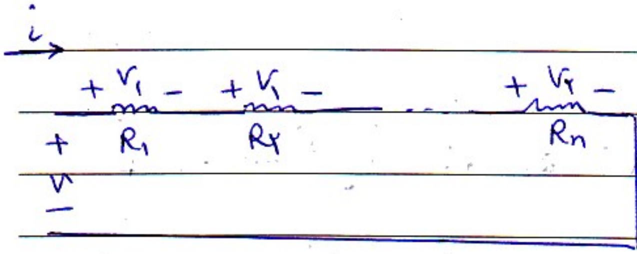
$$1<t<2 \longrightarrow v_C(t) = v_C(1) + \frac{1}{C}\int_1^t i_s(t)\, d\lambda$$



## فصل سوم: مدارهای ساده

مقاومت‌ها:

ترکیب سری مقاومت‌های خطی:

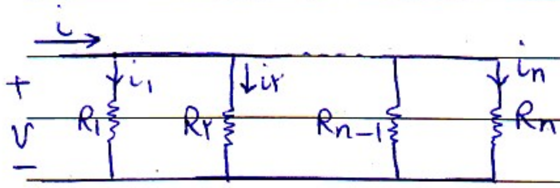


$$v = v_1 + v_2 + \dots + v_n$$

$$v = R_1 i + R_2 i + \dots + R_n i$$

$$\frac{v}{i} = R_1 + R_2 + \dots + R_n \qquad R_{eq} = \frac{v}{i} = \sum_{i=1}^{N} R_i$$

مقاومت‌های موازی:



$$i = i_1 + i_2 + \dots + i_n$$

$$i = \frac{v}{R_1} + \frac{v}{R_2} + \dots + \frac{v}{R_n} \longrightarrow i = v\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{i}{v} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} \Rightarrow \frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} \Rightarrow R_{eq} = \frac{1}{\sum_{i=1} \frac{1}{R_i}}$$

خازن:

برای خازن‌های موازی: $C_{eq} = \sum_{i=1}^{n} C_i$

برای خازن‌های سری: $C_{eq} = \dfrac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,\delta(t)\,dt = x(0) \quad (t=0)$$

فصل دوم مدار

ـه

$$I = \int_{-2}^{4} (t^3+4)\left[\delta(t) + 4\delta(t-2)\right] dt =$$

$$\int_{-2}^{4} (t^3+4)\,\delta(t)\,dt + \int_{-2}^{4} 4(t^3+4)\,\delta(t-2)\,dt = (t^3+4)\Big|_{t=0} + 4(t^3+4)\Big|_{t=2}$$

توجه داریم $t=0$ و $t=-2$ که با صفر کردن آرگومان تابع دلتا به دست آمده‌اند در محدوده‌ی انتگرال گیری معین

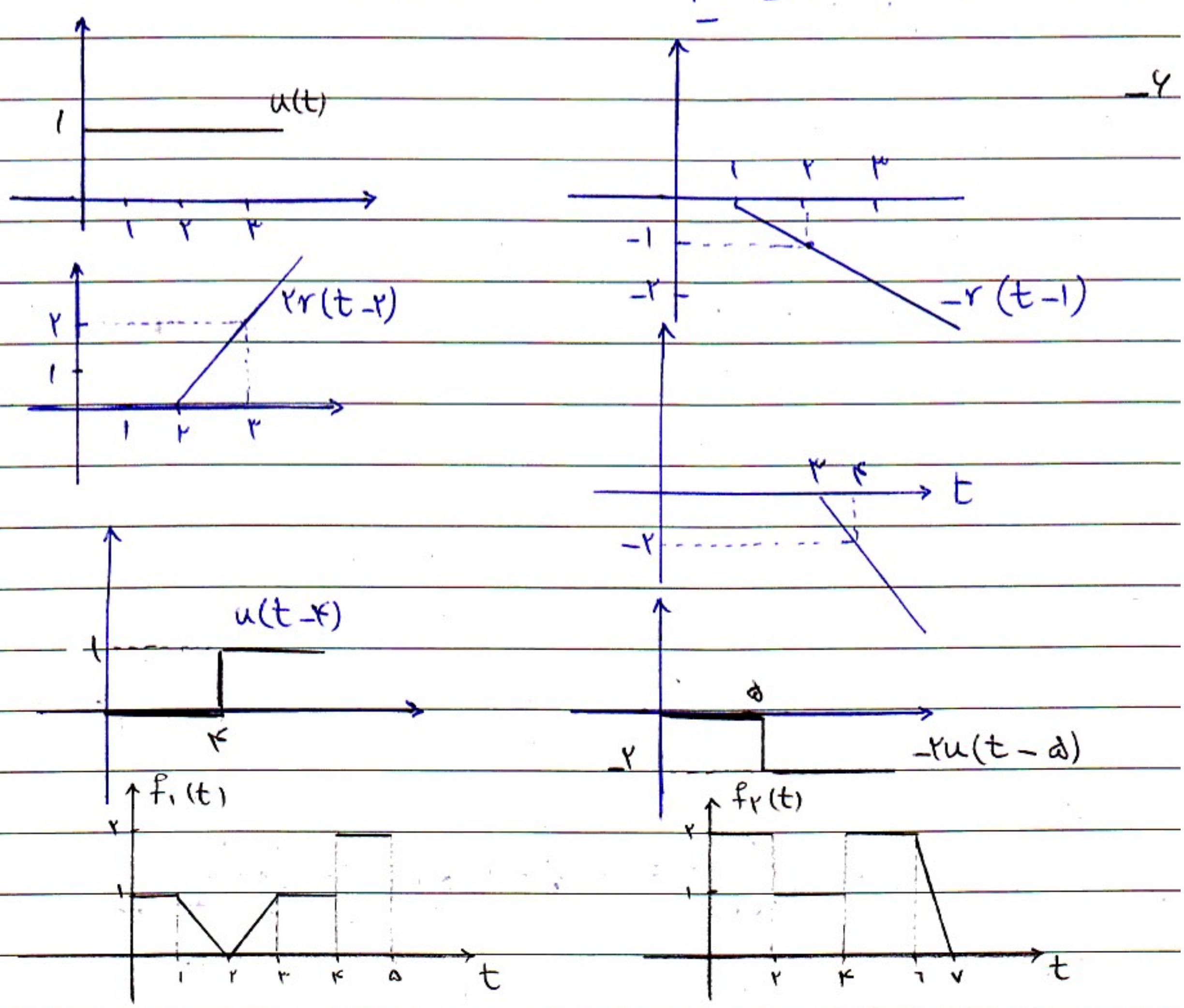
قرار دارند. لذا داریم:
$$I = \left((0)^3+4\right) + 4\left(2^3+4\right) = 52$$

$$I=\int_{-3}^{4} t^2\left[\delta(t)+\delta(t+2/5)+\delta(t-5)\right]dt = \int_{-3}^{4} t^2\delta(t)\,dt + \int_{-3}^{4} t^2\delta(t+2/5)\,dt + \int_{-3}^{4} t^2\delta(t-5)\,dt = t^2\Big|_{t=0} + t^2\Big|_{t=-2/5} + \cancel{t^2\Big|_{t=5}}$$

عدد $t=5$ در عبارت سوم از حاصل جمع درون در محدوده‌ی انتگرال گیری نبوده لذا عبارت سوم از حاصل جمع

درون انتگرال صفر خواهد بود. بنابراین داریم:
$$I = 0^2 + (-2/5)^2 = 6/25$$

۶_

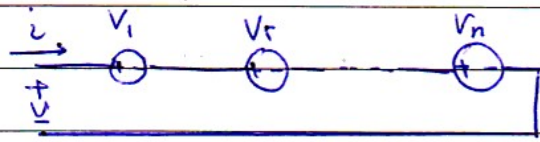


سلف ها:

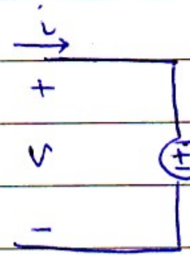
ترکیب سری: $L_{eq} = \sum_{i=1}^{N} L_i$

ترکیب موازی: $L_{eq} = \dfrac{1}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{L_i}}$

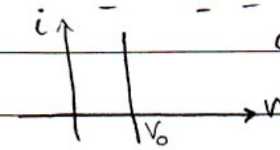
ترکیب سری منابع ولتاژ ایده‌آل:



منبع ولتاژ ایده‌آل را می‌توان یک المان که یک ولتاژ مشخص را ایجاد کند در نظر گرفت و نمودار آن:

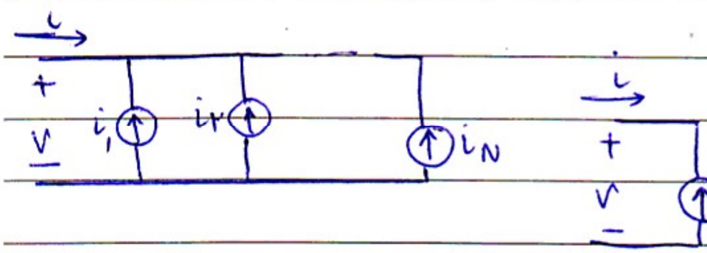


$$V_{eq} = \sum_{i=1}^{N} v_i$$



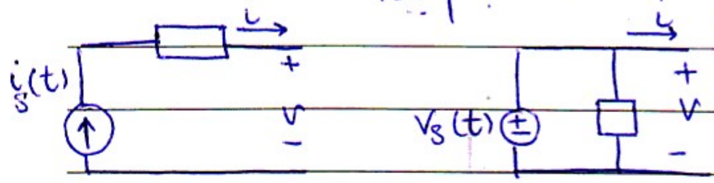
* منابع ولتاژ ایده‌آل را زمانی می‌توان به صورت موازی بست که مقدار آن‌ها باهم برابر باشد.

ترکیب موازی منابع جریان ایده‌آل:

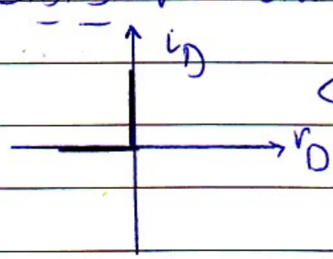


$$i_{eq} = \sum_{i=1}^{N} i_i$$

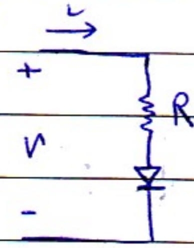
* منابع جریان ایده‌آل را زمانی می‌توان سری بست که مقدار آن‌ها باهم برابر باشد.



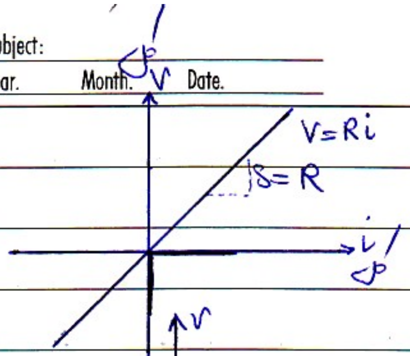
مثال) مشخصه‌ی دیود ایده‌آل که مطابق شکل داده شده. در این صورت مشخصه‌ی $I - V$ دیود ایده‌آل



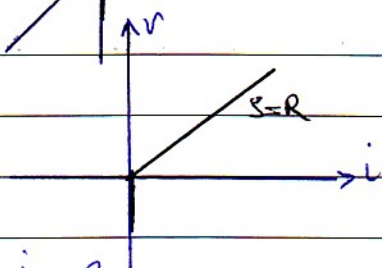
مشخصه‌ی دیود ایده‌آل



نمودار را به دست آورید.

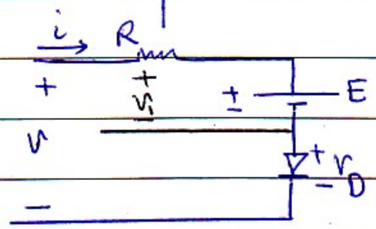



حل :

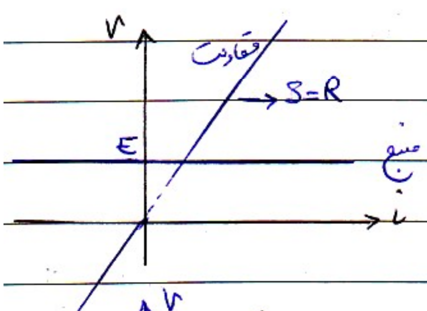


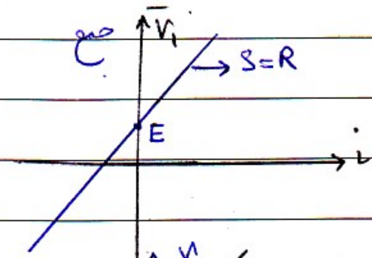

دیود جریان های منفی را حذف می‌کند بنابراین داریم :

مثال) مشخصه i - V ؟




حل : چون سری هستند جریانی که از آن‌ها می‌گذرد با هم برابر است.

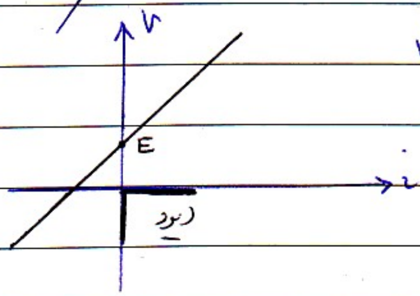


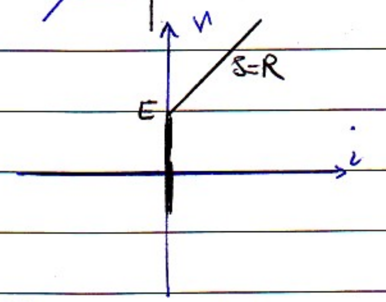

$V_1' = E$

$V_2' = Ri$

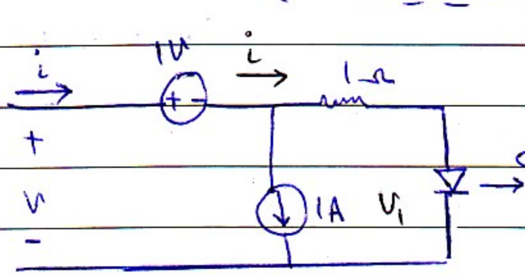
$V_1 = E + Ri$




جمع

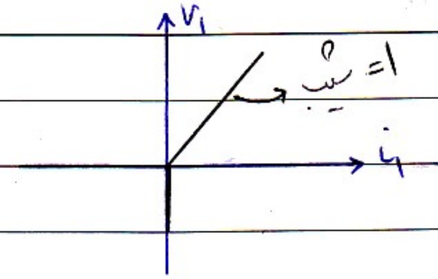



مثال) مشخصه V - i این مدار را به دست آورید؟ (دیود ایده‌آل است.)

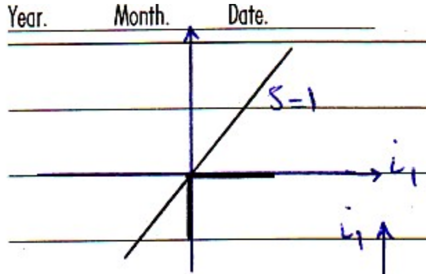


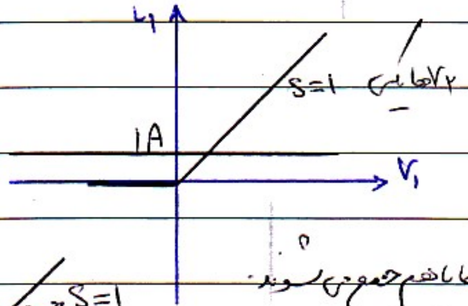
Year. Month. Date.

حل:




جمع



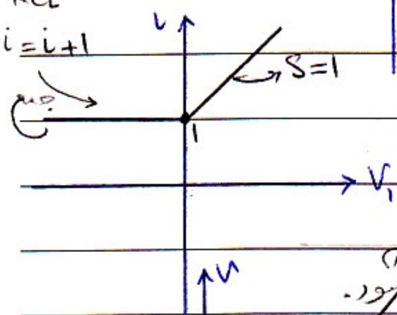




منحنی را می‌خواهیم

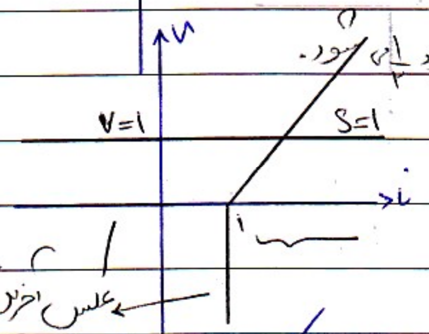
ولتاژهایی هستند که موازی هستند را ولتاژ می‌گیریم و جریان‌ها با هم جمع می‌شوند.

KCL
$i = i + 1$

جمع

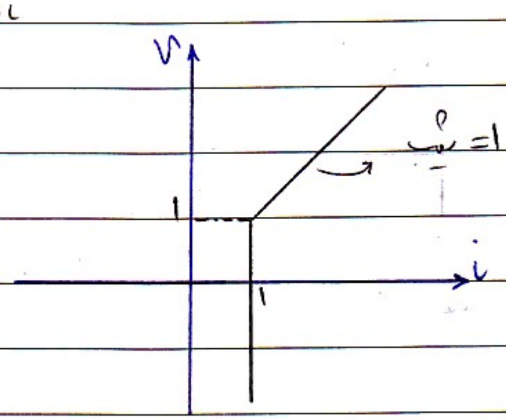


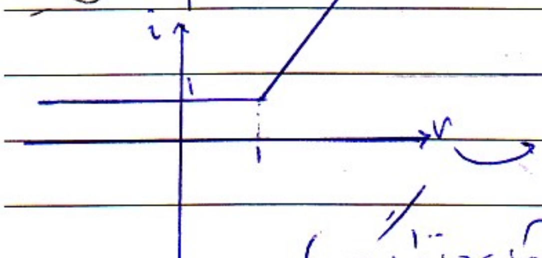

i برحسب $V_1$




اگر ۲ بود $\frac{1}{2}$ می‌شود.

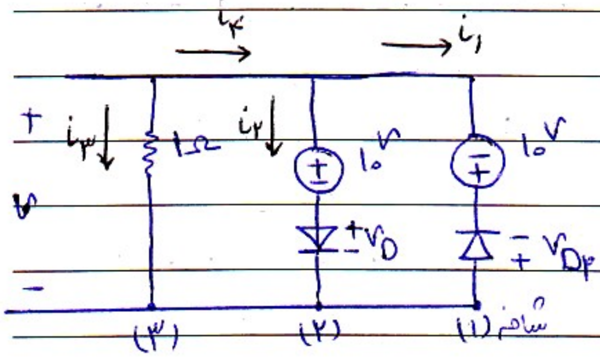
عکس اخرین عمود



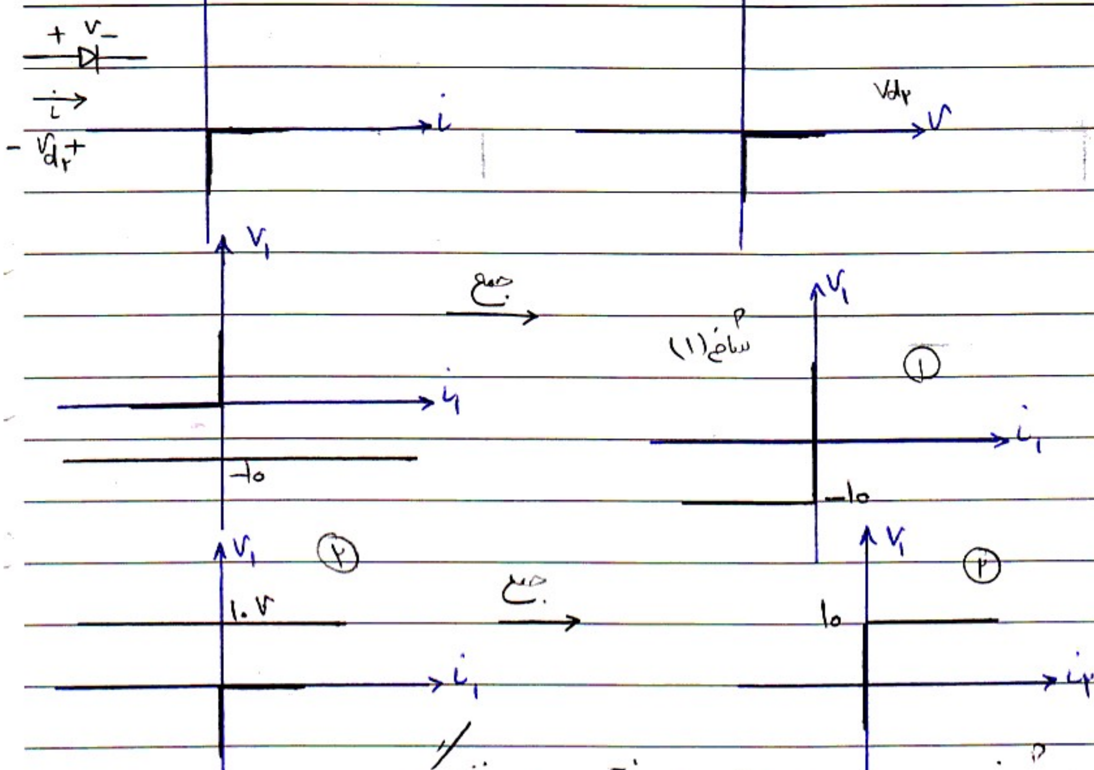




مشخصه V ـ i مدار

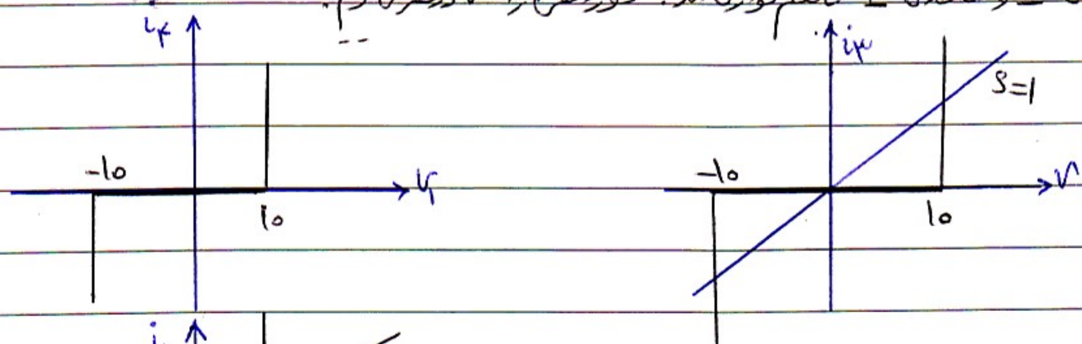
مثال) مشخصه V ـ i مدار روبرو را رسم کنید. (دیودها را ایده‌آل در نظر بگیرید.)

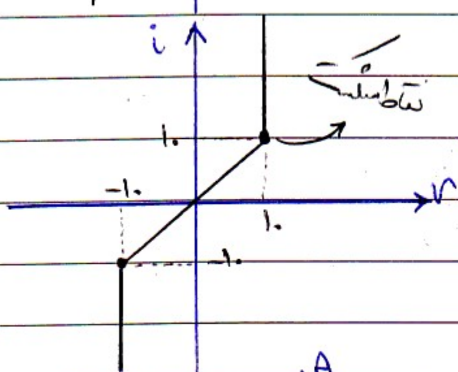


حل :




ساختار ۱ و ساختار ۲ با هم موازی اند. محور افقی را V در نظر می‌گیریم.

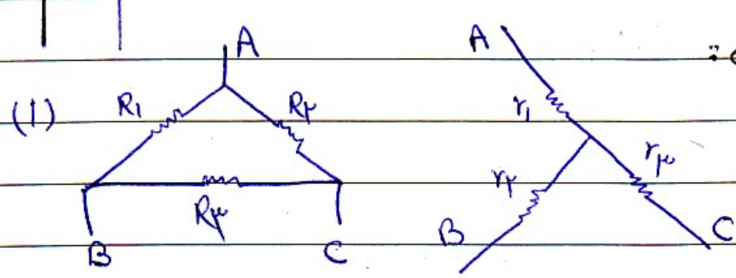



تعداد نقاط شکست در نمودارها معمولاً برابر با تعداد دیودها است.

در اینجا ۲ نقطه‌ی شکست داریم = ۲ دیود

تبدیل ستاره به مثلث و برعکس :



$R_{AB}(1) = R_{AB}(2)$

$R_{AC}(1) = R_{AC}(2)$

$R_{BC}(1) = R_{BC}(2)$

مثلث $\Delta \rightarrow Y$ ستاره

$$r_1 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$r_2 = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$r_3 = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

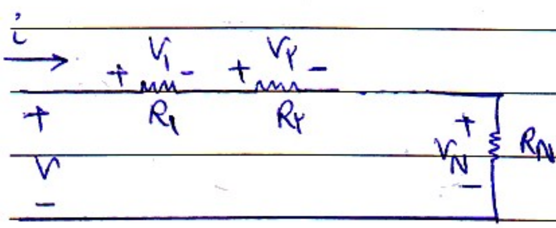
ستاره $Y \rightarrow \Delta$ مثلث

$$R_1 = \frac{r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3}{r_1}$$

$$R_2 = \frac{r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3}{r_2}$$

$$R_3 = \frac{r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3}{r_3}$$

تقسیم ولتاژ و جریان :



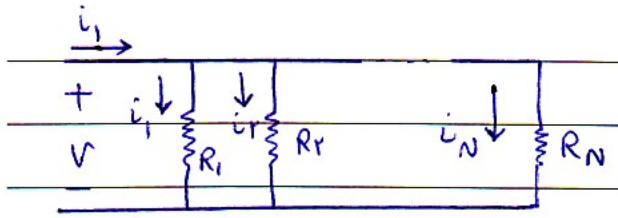

فرض کنید n مقاومت را سری بسته ایم. داریم :

$$V_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2 + \dots + R_N} V$$

$$V_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2 + \dots + R_N} V$$

$$\vdots$$

$$V_N = \frac{R_N}{R_1 + R_2 + \dots + R_N} V$$



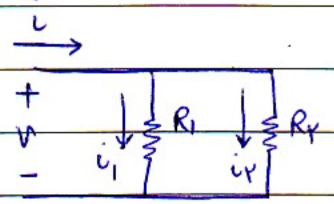

$$i_1=\frac{G_1}{G_1+G_2+\cdots+G_N}\,i$$

$$i_2=\frac{G_2}{G_1+G_2+\cdots+G_N}\,i$$

$$\vdots$$

$$i_N=\frac{G_N}{G_1+G_2+\cdots+G_N}\,i$$

در حالیکه دو مقاومت داشته باشیم:




$$\begin{cases} i_1=\dfrac{R_2}{R_1+R_2}\,i \\[2ex] i_2=\dfrac{R_1}{R_1+R_2}\,i \end{cases}$$

اصل جمع آثار (برهم نهی):

در یک مدار خطی که شامل چندین منبع ولتاژ و جریان مستقل است، پاسخ مدار برابر است با مجموع پاسخ های مدار به هر یک از منابع مستقل، وقتی سایر منابع مستقل صفر شوند.

مدار خطی: مدار خطی مداری است که شامل اجزای خطی باشد مثل مقاومت خطی، سلف خطی، خازن خطی و ...

صفر کردن منابع: اگر منبع ولتاژ باشد ← اتصال کوتاه

اگر منبع جریان باشد ← مدار باز

مثال) با استفاده از اصل جمع آثار، جریان $i_1$ را بدست آورید؟