رياضي پيش دانشگاهي

فهرست

اهداف

آشنايي با مفاهيم رياضي

توانايي حل مسئله

آشنايي با چند جمله ايهاو مجموعه ها و عبارتهاي گويا

فصل اول

نظریه مجموعه ها

در این فصل به معرفی مفهوم مجموعه مجموعه ، زیر مجموعه و عملیات روی مجموعه ها(اجتمـــاع ، اشتراک ، تفاضل ، مکمل گیری) و معرفی مجموعه های خاص می پردازیم .

تعریف مجموعه:

یک مجموعه گردآورده ای از اشیاء کاملاً معین و متمایز است . اشیاء تشـــکیل دهنـــده یــک مجموعه را اعضای مجموعه یا عناصر مجموعه می نامیم .

معرفی چند مجموعه :

مجموعه اعداد $\{۱,۲,۳,...\}$ را مجموعه اعداد طبیعی می نامیم و آن را با $\mathbb{N}$ نشان می دهیم .

پس :

$$\mathbb{N}=\{۱,۲,۳,...\}$$

مجموعه اعداد صحیح را با $\mathbb{Z}$ نشان می دهیم . این مجموعه شامل اعـــداد طبیعـــی، قرینـــه اعداد طبیعی و صفر است . بنابراین :

$$\mathbb{Z}=\{...,-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲,۳,...\}$$

مجموعه اعدادگویا را با $\mathbb{Q}$ نشان میدهیم . این مجموعه شامل اعداد کسری به فرم $\frac{a}{b}$ است

که در آن b,a اعداد صحیح هستند و b عددی غیر صفر است . چند عضو $\mathbb{Q}$ عبارتند از

$\frac{۱}{۳},\frac{۲}{۵},-\frac{۷}{۱۱}$.

اعداد اعشاری پایاندار:

هر عدد گویا را می توان به صورت یک عدد اعشاری نوشت . کافیست صورت را بـــر مخـــرج کسر تقسیم کنیم .

اعداد اعشاری که تعداد ارقام آنـــها متنـــاهی اســـت را عـــدد اعشاری پایاندار می نامیم .

اعداد اعشاری بی پایان:

در تبدیل اعداد گویا به یک عدد اعشاری ممکن است یک یا چند رقم اعشار همواره تکــرار شود. مثلاً در تبدیل کسر $\frac{۱}{۳}$ به عدد اعشاری ، عدد ۳ مرتباً تکرار می شود .

اعداد اعشاری اصم یا گنگ:

آن دسته از اعداد اعشاری که تعداد ارقام اعشار آن نامتناهی است و ارقام اعشـــار آن دوره تناوب ندارد اعداد اصم یا گنگ هستند.

مجموعه اعداد حقیقی:

مجموعه اعدادی که شامل تمام اعداد گویا و اعداد غیرگویا یــا اصــم اســت را بــا $\mathbb{R}$ نشــان می دهیم و آن را مجموعه اعداد حقیقی می نامیم.

مجموعه اعداد صحیح و مجموعه اعداد گویا و مجموعــه اعــداد حقیقــی نــیز مثالــهائی از مجموعه بی پایان یا متناهی هستند.

تعلق و عضویت :

مجموعه $A = \{۱،۲،۳\}$را در نظر بگیرید.عـــدد ۱ عضــوی ازمجموعه Aاســت.عــدد ۲، عضــوی ازمجموعه Aاست.و عدد ۳ ، نیز عضوی از مجموعه Aاست. عــدد۵ بــه مجموعــه Aتعلــق نــدارد. عــدد صفــر عضــو ی از مجموعه Aنیســت . هــر عــدد غــیر از ۱و۲و۳ بـــه Aتعلق ندارد.اگرعضو a به مجموعه A متعلق باشد می نویسیم $a \in A$، پـــس علامــت $\in$ علامــت تعلق است . در صورتی که a به مجموع A تعلق نداشته باشد، می نویسیم $a \notin A$

معرفی یک مجموعه :

یک مجموعه به سه طریق ممکن است نمایش داده شود .

۱–روش تفصیلی :

در این روش اعضای یک مجموعه رافهرست می کنیم وآن راداخل دو آکولادقرارمی دهیم .

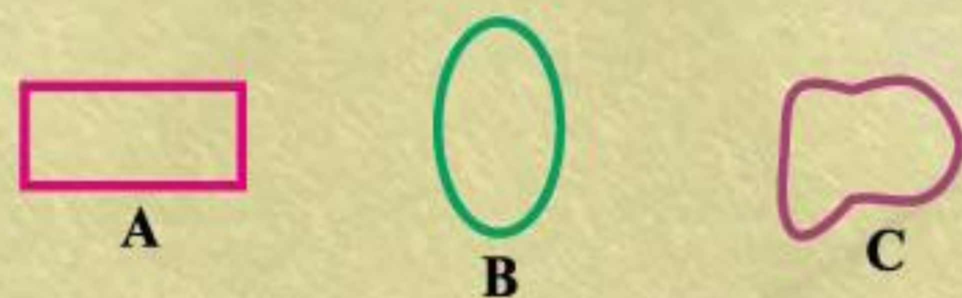
۲–نمایش مجموعه با استفاده از علائم ریاضی :

این طریق نمایش مجموعه از متداولترین روش نمایش یک مجموعه در ریاضی است. در ایـــن روش اعضای مجموعه را معمولاً با یکی از حروف کوچک لاتین مثلاً x نشـــان مـــی دهیـــم . سپس در مورد این xها توضیح داده و خاصیت معین آنها را بیان می کنیم .

۳- نمایش مجموعه با نمودار ون :

یک روش ساده برای نمایش مجموعه ها استفاده از نمودار است . ایــن روش اولیــن بــار بــه وسیله " ون " ریاضیدان معروف انگلیسی به کار برده شد . " ون " مجموعه را با قســـمتی از نقاط صفحه محدود به یک مستطیل یا محدود به یک دایره یا هر منحنـــی بســته دیــگری نمایش داد و هر نقطه داخل شکل را یک عضو مجموعه فرض کرد .

در زیر مجموعه های A , B , C با استفاده از این روش نمایش داده شده اند :



مجموعه تک عضوی :

مجموعه ای که تنها شامل یک عضو است مجموعه تک عضوی نامیده می شود .

مجموعه تهی :

مجموعه ای که هیچ عضوی نداشته باشدمجموعه تهی نامیده می شود.مجموعه تـــهی را بـا نماد ∅یا { } نمایش می دهیم.

تساوی دو مجموعه :

مجموعه A را مساوی مجموعه B گوئیم هرگاه هردوشامل عناصریکسانی باشند . بــه عبــارت دیگر هرعضو A عضوی از B و هرعضو B عضوی از A باشد .

آنگاه می نویسیم $A = B$ درصورتی که B, A برابر نباشند می نویسیم $A \neq B$.

زیر مجموعه های یک مجموعه :

مجموعه ها ی A و B رادر نظر بگیرید اگر هر عضو هر A عضوی از B باشد A را یــــک زیــر مجموعه Bمی نامیم و می نویسیم $A \subseteq B$ و می خوانیم A زیر مجموعه B است .

بطور وضوح هر مجموعه زیر مجموعه خودش است . اگر Aزیر مجموعـــه B باشـــد و $A \neq B$ آنگاه A را زیر مجموعه سره یا حقیقی یازیر مجموعه محض B می نامیم و مـــی نویســـیم $A \subset B$. توجه کنیدکه تمام زیرمجموعه های مجموعه B به جز Bزیرمجموعه سره هســـتند .

اگر A زیر مجموعه B نباشد می نویسیم $A \not\subset B$.

مجموعه توانی:

مجموعه تمام زیر مجموعه های A را با نماد $P(A)$ نمایش می دهیم وآن را مجموعــه توانــی A می نامیم .

اجتماع و اشتراک وتفاضل مجموعه ها :

روی مجموعه ها سه عمل اجتماع ، اشتراک و مکمل گیری به صورت زیر خواهیم داشت.

اجتماع دو مجموعه :

اجتماع دو مجموعه B,A را با نماد $A \cup B$ نمایش می دهیم و برابراست بـــا مجموعـــه تمـــام عناصری که به A یا B تعلق دارند . بنابراین :

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ یا } x \in B\}$$

اشتراک دو مجموعه :

اشتراک دو مجموعه B,A را با نماد $A \cap B$ نمایش می دهیم و عبارت است از مجموعه تمـام عناصری که هم به A و هم به B تعلق دارند . به عبارت دیگر $A \cap B$ مجموعـه ای اسـت از عضوهای مشترک B,A بنابراین :

$$A \cap B = \{x \mid x \in A , x \in B\}$$

تعریف :

مجموعه های B, A را از هم جدا یا جدا از هم نامیم هــر گاه اشــتراکی نداشــته باشــند بــه عبارت دیگر هر گاه :

$$A \cap B = \varnothing$$

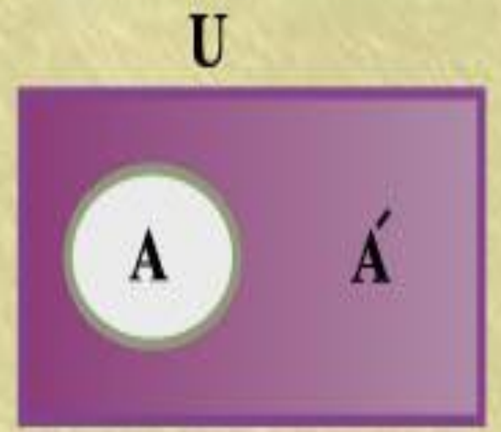
مجموعه مرجع (جهانی) :

در یک بحث معین تمام عضوهای مجموعه مورد مطالعه متعلق به مجموعـــه ای موســوم بــه مجموعه مرجع می باشند . مجموعه مرجع را با حرف U (یا در بعضی مواقع با M) نمایش می دهیم .

متمم یک مجموعه :

مجموعه تمام حروف الفبای لاتین را به عنوان مجموعه مرجع U در نظــر بگیریــد . فــرض کنید A مجموعه حروف صدادار باشد منظور از متمــم A نســبت بــه U کــه بــا A' نمــایش می دهیم مجموعه حروفی از الفبای لاتین است که صدادار نیستند .

تعریف : فرض کنید U مجموعه مرجع و Aیک دلخـــواه باشـــد منظـــور از متمـــم Aمجموعـــه عناصری از U است که به Aتعلق ندارند . متمم Aنسبت به U را با نماد A' (یا با نماد A^C) نمایش می دهیم .توجه کنید که متمم Aنسبت به U را بطور اختصار متمم A مـــی نـامیم و معمولاً از ذکر جمله نسبت به U خوداری می کنیم .



تفاضل دو مجموعه :

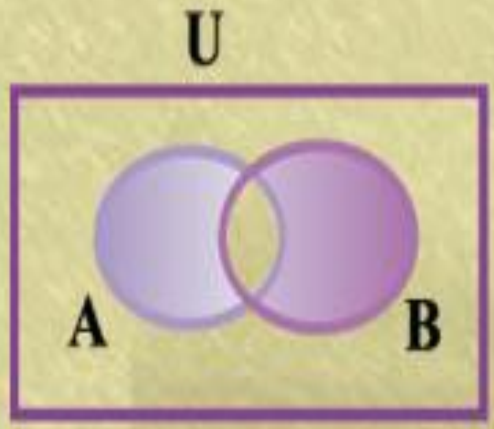
تفاضل دو مجموعه B,A را که با نماد $A - B$ نمایش می دهیم عبارت است از مجموعه همـــه آن عضوهایی از A که در مجموعه B نباشند .

تفاضل متقارن دو مجموعه :

برای دو مجموعه دلخواه A , Bتفاضل متقارن دو مجموعه را با نماد $A\Delta B$ نشان می دهیـــم و عبارت است ازمجموعه تمام اعضائی که تنها به Aیا تنها به Bتعلق دارند . به عبارت دیگر :

$$A\Delta B = (A - B)\bigcup(B - A)$$

در شکل زیر ناحیه هاشور خورده $A\Delta B$ را نشان می دهد .



عدد اصلی یا عدد یک مجموعه :

تعداد عضوهای مجموعه متناهی A را عدد اصلی مجموعه A مـــی نــامیم و بــا $n(A)$ نمایش می دهیم .

فصل دوم

دستگاه اعداد حقیقی

نا مساویها و بازه ها :

در فصل اول با مفهوم مجموعه به طور عام و مجموعه اعداد حقیقی ($\mathbb{R}$) به طور خاص آشـنا شدید . در این فصل قصد داریم بعضی ا ز تعاریف ، قضایا و روابط مهم در مجموعـــه اعــداد حقیقی را بیان کنیم .

قضیه ۱ :

اگر $a < b$, $b < c$ باشد ، آنگاه : $a < c$.

قضیه ۲ :

اگر $a < b$ آنگاه برای هر عدد حقیقی و دلخواه c داریم :

$$a - c < b - c \quad , \quad a + c < b + c$$

قضیه ۳ :

اگر $a < b$ و c یک عدد حقیقی مثبت باشد ، آنگاه : $ac < bc$.

قضیه ۴ :

اگر $a < b$ و اگر c یک عدد حقیقی منفی باشد ، آنگاه : $ac > bc$.

قضیه ۵ :

اگر $0 < a < b$, $0 < c < d$ ، آنگاه : $ac < bd$.

تعریف :

فرض کنید a , b دو عدد حقیقی باشند به طوریکه $a < b$.

فاصله باز a , b را با علامت (a,b) نمایش داده و به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$(a,b)=\{\, x \mid a < x < b \,\}$$

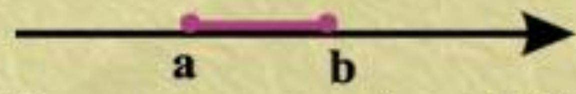
روی محور xها ، فاصله (a,b) را به صورت زیر نمایش می دهیم :

(دایره تو خالی یعنی آن نقطه از خط حذف شده است.)

فاصله بسته a , b را با علامت $[a,b]$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$[a,b]=\{\, x \mid a \le x \le b \,\}$$

روی محور xها ، فاصله $[a,b]$ را به صورت زیر نمایش می دهیم :



فاصله نیمه بازاز سمت چپ را با علامت $(a,b]$ نمایش داده و به صورت زیرتعریف می کنیم :

$$(a,b]=\{x|a<x\le b\}$$

روی محور xها ، فاصله $(a,b]$ را به صورت زیر نمایش می دهیم :

فاصله نیمه باز از سمت راســـت را بـا علامــت $[a,b)$ نمـایش داده وبـه صـورت زیرتعریـف می کنیم :

$$[a,b)=\{x|a\le x<b\}$$

روی محور xها ، فاصله $[a,b)$ را به صورت زیر نمایش می دهیم :

قضیه :

الف) برای هر عدد حقیقی a ، داریم :

$$a+(-a)=(-a)+a=0$$

ب) حاصلضرب هر عدد حقیقی در صفر ، مساوی صفر است .

$$a\times 0=0\times a=0$$

ج) اگر $ab=0$ آنگاه : $a=0$ یا $b=0$.

د) اگر $a=b$ آنگاه : $\frac{1}{a}=\frac{1}{b}$ با این شرط که $b,a\neq 0$.

ه) اگر $a=b$ آنگاه برای هر عدد حقیقی c داریم : $ac=bc$ و برای هر عـــدد حقیقـــی غـــیر صفر c داریم : $\frac{a}{c}=\frac{b}{c}$.

و) اگر a , b , c سه عدد حقیقی باشند آنگاه :

$$a+c=b+c\Rightarrow a=b$$

$$ac=bc\ ,\ c\neq 0\Rightarrow a=b$$

توان و عملیات مربوط به آن :

فرض کنید a یک عدد حقیقی و n یک عدد طبیعی باشد . تعریف می کنیم :

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n\ \text{مرتبه}}$$

a را پایه و n را توان یا نما می نامیم .

قضیه :

برای هر دو عدد حقیقی a , b و هر دو عدد طبیعی m , n داریم :

الف) $a^m \times a^n = a^{m+n}$

ب) $a^m \times b^m = (ab)^m$

ج) $(a^m)^n = a^{mn}$

تعریف : هرگاه $(-m)$ یک عدد صحیح منفی باشد ، آنگاه تعریف می کنیم :

$$a^{-m} = \frac{1}{a^{m}}$$

قضیه :

برای هر دو عدد حقیقی a , b و هر دو عدد طبیعی n , m داریم :

الف) $a^n \div a^m = \dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \quad , \quad a \neq 0$

ب) $a^n \div b^n = (\dfrac{a}{b})^n \quad , \quad b \neq 0$

رادیکالها و اعمال روی آنها

تعریف : اگر b,a دو عدد حقیقی و n یک عدد طبیعی باشد بطوریکه $b^n = a$ آنـگاه b را ریشه n–ام a می نامیم . در تساوی $۳^۲ = ۹$ عدد ۳ ریشه دوم عدد ۹ می باشـــد . تسـاوی $b^n = a$ را می توان به صورت $b = \sqrt[n]{a}$ نشان داد که نماد $\sqrt{\ }$ رادیکــال مــی گوینــد و n را فرجه می نامند .

قضیه :

اگر $a \in \mathbb{R}$, $m,n \in \mathbb{N}$ آنگاه :

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{m}\right)^{\frac{1}{n}} \quad \text{یا} \quad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^{m}}$$

جمع جبری رادیکالها :

در صورتی می توان چند رادیکال را جمع جبری نمود کـــه هــم فرجــه و هــم عبــارت زیــر رادیکال ، مساوی باشند .

تعیین فرجه مشترک :

برای تعیین فرجه مشترک بین چند رادیکال ، کـــوچکـــترین مضــرب مشـــترک فرجـــه هـــا (یعنی کوچکترین عددی که بر تمام فرجه ها بخش پذیر است) را بر هر یک از فرجه هـــا تقسیم و عبارت زیر آن رادیکال را به توان خارج قسمت می رسانیم .

ضرب و تقسیم رادیکالها :

برای ضرب و تقسیم رادیکالها ممکن است دو حالت زیر به وجود آید :

الف) فرجه رادیکالها با هم برابر باشند . در اینصورت داریم :

$$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

$$\sqrt[n]{a} \div \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

در صورتیکه رادیکالها ضریب داشته باشند ، ضرائب آنها در هم ضرب یــا بــر هــم تقســیم می شود .

ب) فرجه را دیکالها با هم برابر نباشند . در اینصورت باید فرجه ها را یکسان نمود .

ضرب عدد در رادیکال :

هرگاه بخواهیم عدد پشت رادیکال را به زیر رادیکال ببریم بایستی آن عدد را به توان فرجه رادیکال برسانیم و به زیر رادیکال منتقل کنیم .

حالت اول : اگر **n** زوج باشد داریم :

$$a\sqrt[n]{b} = \begin{cases} \sqrt[n]{a^n b} & , \quad a > ۰ \\ -\sqrt[n]{a^n b} & , \quad a < ۰ \end{cases}$$

حالت دوم : اگر **n** فرد باشد داریم :

$$a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$$

ضرب و تقسیم فرجه بر عدد :

الف) هرگاه $a \geq 0$ باشد ، آنگاه :

$$\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[\frac{m}{t}]{a^{\frac{n}{t}}} \qquad , \qquad \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nt]{a^{mt}}$$

ب) $$\left(\sqrt[m]{a^n}\right)^t = \sqrt[m]{\left(a^n\right)^t}$$

چند جمله ایها

برای تعریف چند جمله ایها ابتدا عبارات جبری را تعریف می کنیم .

تعریف : هر عبارتی شامل یک یا چند متغیر ، اعداد و تعداد متناهی از اعمال (جمع، تفـاضل ، ضرب ، تقسیم ، توان و ریشه گیری) بین آنها ، یک عبارت جبری نامیده می شود .

یک جمله ای :

عبارتی جبری که در آن اعمال جبری انجام شده روی مقادیر حرفی تنها شامل ضرب یا بـه توان عدد صحیح مثبت رساندن باشد ، یک جمله ای نامیده می شود .

تعریف درجه یک جمله ای :

درجه یک جمله ای نسبت به یک حرف ، برابر با نمای آن حرف در یک جمله ای ساده شـده است .

درجه یک جمله ای نسبت به تمام حـــروف برابربـامجموع نماهـای همـان حـروف دریـک جمله ای تعریف می شود .

یک جمله ایهای متشابه :

یک جمله ایهایی که قسمت حرفی آنها یکی باشد و تنها در ضرائب عـــددی بـا هــم فــرق داشته باشند ، یک جمله ای متشابه نامیده می شوند .

جمع جبری یک جمله ایها :

چند یک جمله ای را زمانی می توان جمع جبری نمود که همه یک جمله ایها متشابه باشـــند . در اینصورت کافی است کلیه ضرائب یک جمله ایها را جمع نموده و حروف و توان یکـــی از جملات متشابه را در جلوی آنها قرار دهیم .

ضرب و تقسیم یک جمله ایها :

برای انجام عمل ضرب و تقسیم یک جمله ایها ، ابتدا ضرائب آنها را در یکدیگر ضرب و یا بر یکدیگر تقسیم می کنیم . سپس با استفاده از قواعد مربوط بــه توانــها ، حــروف را در هــم ضرب یا بر یکدیگر تقسیم می کنیم .

به توان رساندن یک جمله ایها :

برای به توان رساندن یک جمله ای ، کافیست توان حروف را در توان جدید ضرب و ضرائب را هم به توان برسانیم .

چند جمله ای :

مجموع جبری چند یک جمله ای با توانهای صحیح را چند جمله ای می نامند .

درجه چند جمله ای :

درجه چند جمله ای نسبت به یکی از حروف ، بزرگترین نمای آن حـرف در چنـد جملـه ای تعریف می شود . درجه هر عدد ثابت را صفر فرض می کنیم .

جمع جبری چند جمله ایها :

جمع جبری دو یا چند چند جمله ای برابر است با یک چند جمله ای که از جمع جبری همـــه جملات آن حاصل می شود .

ضرب چندجمله ایها :

برای محاسبه حاصلضرب دو جمله ای ، هر جمله از یکی از آنها را در همه جمله هــای دیــگر ضرب و مجموع جبری حاصل را بدست می آوریم .

چند جمله ای شامل یک متغیر :

فرم کلی چند جمله ای از درجه n ، که تنها شامل یک متغیر مانند x اســـت و معمــولاً بــر حسب توانهای x به طور نزولی مرتب شده است ، به صورت زیر است :

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

که معمولاً عبارت اخیر را با علامت $P(x)$ نمایش مــی دهیــم و بــه a_0 ضریــب ثــابت چنــد جمله ای می گوئیم.

تقسیم یک چند جمله ای بر یک جمله ای :

در تقسیم چند جمله ای بر یک جمله ای هر جمله آن را بر یک جمله ای تقسیم می کنیم .

تقسیم یک چند جمله ای بر یک چند جمله ای :

فقط حالتی را در نظر می گیریم که صورت و مخرج کسر ، هر دو ، چند جمله ای از یک متغیر باشند . سپس به صورت زیر عمل می کنیم :

الف)جملات مقسوم ومقسوم علیه رابر حسب قوای نزولی حرف مورد نظر مرتب می کنیم .

ب) اولین جمله مقسوم را بر اولین جمله مقسوم علیه تقسیم نموده و حاصل را در خارج قسمت می نویسیم .

ج) خارج قسمت را در تک تک جملات مقسوم علیه ضرب می کنیم و حاصل را در علامت منفی ضرب کرده با مقسوم جمع جبری می نماییم .

د) حاصل بدست آمده (یا مقسوم جدید) را بر مقسوم علیه تقسیم می کنیم و این عمل را آنقدر ادامه می دهیم تا باقیمانده صفر و یا عبارتی گردد که درجه آن کمتر از درجه مقسوم علیه باشد . به این ترتیب عمل تقسیم پایان می یابد .

اتحادهای مهم

اتحاد یک تساوی حرفی است که به ازاء کلیه مقادیری کـــه بــه حــرف یــا حــروف نســبت می دهیم ، تساوی برقرار باشد . به عبارت دیگر یک رابطه را که به ازاء هر مقدار از حـــروف همواره درست باشد ، اتحاد می نامیم .

اتحاد مربع مجموع دو جمله :

$$(a+b)^۲ = a^۲ + ۲ab + b^۲ \qquad (۱)$$

اتحاد مربع تفاضل دو جمله :

$$(a-b)^۲ = a^۲ - ۲ab + b^۲ \qquad (۲)$$

اتحاد مزدوج :

$$(a-b)(a+b) = a^۲ - b^۲ \qquad (۳)$$

اتحاد مکعب مجموع دو جمله :

$$(a+b)^۳ = a^۳ + ۳a^۲b + ۳ab^۲ + b^۳ \qquad (۴)$$

اتحاد مکعب تفاضل دو جمله :

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \qquad (5)$$

اتحاد تفاضل مکعبهای دو جمله :

$$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3 \qquad (6)$$

اتحاد مجموع مکعبهای دو جمله :

$$(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3 + b^3 \qquad (7)$$

اتحاد یک جمله مشترک :

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab \qquad (8)$$

اتحاد مربع مجموع سه جمله :

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc \qquad (9)$$

تجزیه یک عبارت جبری به حاصلضرب عوامل اول :

برای تجزیه یک عبارت جبری به حاصلضرب عوامل اول می توان به یکی از چهار طریق زیـر عمل کرد :

الف) فاکتورگیری :

هرگاه تک تک جملات یک عبارت جبری در عاملی مشترک باشند ، آن عامل را بـه عنـوان فاکتور مشترک انتخاب نموده سپس هر یک از جملات عبارت را بر عامل مشـترک تقسـیم می کنیم .

ب) دسته بندی :

هرگاه در یک عبارت جبری بین تمام جملات عامل مشترکی وجود نداشته باشد ولی بعضـــی از جملات دارای عامل مشترک باشند ، آنها را به دو و یا چند دسته تقسیم مـــی کنیـــم و از عوامل مشترک هر دسته فاکتور می گیریم تا چند عبارت با عامل مشترک بدست آیـــد و در آخر با استفاده از روش فاکتورگیری عبارت داده شده را تجزیه می کنیم .

ج) تجزیه به کمک اتحادها :

اگر عبارت داده شده از درجه دوم باشد ، در فصل مربوط به معادلات درجـــه دوم ، توضیـــح داده شده است که چگونه می توانید با استفاده از مفهومی به نام (Δ) تشخیص دهید کـــه آیا عبارت درجه دوم داده شده به عوامل درجه اول تجزیه خواهد شد یا خـــیر و اگر تجزیـــه پذیر است ، چگونه می توان آن را تجزیه کرد . اما اگر عبارت داده شده از درجـــه بیشـــتر از دو باشد ، می توان به کمک اتحادهای اشاره شده در قسمت قبل ، آنـــها را در صورتـــی کـــه تجزیه پذیر باشند ، به عوامل کوچکتر تجزیه کرد .

د) تجزیه عبارت از طریق افزودن و کاستن :

با توجه به عبارت جبری داده شده ، اگر هیچ کدام از روشهای قبل نتیجه نداد باید دید کـه آیا می توان با اضافه و کم کردن یک عبارت ، آن را به حاصلضرب عوامل درجه اول تبدیـــل کرد یا خیر . معمولاً برای تجزیه عبارات جبری که به صورت مجموع دو جمله مربع هسـتند ، می توان از این روش استفاده کرد .

عبارتهای گویا و اعمال روی آنها

اگر صورت و مخرج کسری چند جمله ای باشد آن کسر را عبارت گویا می نامیم . به عنــوان مثال کسرهای $\frac{4}{6xy}$, $\frac{7s-5}{t^2+1}$, $\frac{-x+5}{x^2+1}$ عبارتــهای گویــا هســتند . چــون مخــرج کســر نمی تواند صفر باشد،بنابراین در عبارتهای گویای بالا داریم $x\neq 0$, $y\neq 0$

تحویل عبارتهای گویا :

یک عبارت گویا را ساده شده می نامیم اگر صورت و مخرج آن عامل مشترک دیگری به جز ۱ , ۱- نداشته باشند . اگر عبارت گویا ساده شده نباشد ، می توان عبــارت گویــای ســاده شده ای را جایگزین آن کرد . این عمل را با تجزیه صورت و مخرج و تقسیم آنها بر عاملهای مشترک انجام می دهیم . این شیوه را تحویل عبارتهای گویا به ساده تریـــن شــکل ممکــن می نامیم .

ضرب عبارتهای گویا :

برای ضرب عبارتهای گویا ، از خاصیت کسرها استفاده می کنیم . یعنی :

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \qquad (*)$$

در ضرب عبارتهای گویا ابتدا صورت و مخرج هرکسر را تجزیه کرده و سپس با اســـتفاده از قانون (*) آنها را در یکدیگر ضرب می کنیم . بهتر است قبل از انجام عمل ضــرب ، عوامــل مساوی را از صورت و مخرج کسرها حذف کنیم .

جمع و تفریق عبارتهای گویا :

برای جمع و تفریق عبارتـهای گویـا ، نخســت مخــرج کســرها را تجزیــه کــرده و ســپس کوچکترین مضرب مشترک آنها را به عنوان مخرج مشترک کسرها انتخاب می کنیم و ایــن مخرج مشترک را بر مخرج اولیه هر عبارت گویا تقسیم نموده ، حاصل را در صــورت همــان عبارت گویا ضرب می کنیم و در آخر با توجه به علامتها ، کسرها را ساده می کنیم .

تقسیم عبارتهای گویا :

برای تقسیم عبارتهای گویا ، ابتدا صورت و مخرج کسر را تجزیه می کنیم و سپس عبـــارت گویای اول را نوشته و آن را در معکوس عبارت گویای دوم ضرب می کنیم و در نهایت مـانند ضرب کسرها عمل می کنیم .

کسر مرکب و کسر ساده :

اگر کسری شامل یک کسر در صورت یا در مخرج یا در هــر دو باشــد ، آن راکســر مرکــب می نامیم . در مقابل کسری که مرکب نیست به کسر ساده مرسوم است .

برای ساده کردن کسرهای مرکب بایستی ابتدا کسرهای موجود در صورت و مخرج را ســاده کنیم و سپس عمل دور در دور و نزدیک در نزدیک را انجام دهیم .

گویا کردن مخرج کسرها :

در صورتی که در مخرج کسر ، رادیکال وجود داشــته باشــد ، آن را کســر اصــم یــا گنــگ می گوییم . منظور از گویا کردن یک کسر ، بدست آوردن کسری است که با کسر اول برابــر بوده و مخرج آن دارای رادیکال نباشد .

حالت اول :

اگر مخرج کسر به صورت $\sqrt[m]{A^n}$ باشد ، صورت و مخرج کسر را در عبارت $\sqrt[m]{A^{m-n}}$ ضرب می کنیم . به عبارت دیگر :

$$\frac{B}{\sqrt[m]{A^n}} = \frac{B\sqrt[m]{A^{m-n}}}{A}$$

حالت دوم :

اگر مخرج کسر از مجموع دو رادیکال با فرجه مساوی به صورت زیر تشکیل شده باشد :

$$\frac{C}{\sqrt[n]{A} \pm \sqrt[n]{B}}$$

با استفاده از اتحادها کسر را گویا می کنیم .

فصل سوم

معادله و نامعادله های درجه اول ودوم

معادلات درجه اول یک متغیره (یک مجهولی)

تعریف: یک تساوی جبری بر حسب یک متغیر که به ازای بعضی از مقادیر عددی که بــه آن متغیر میدهیم به تساوی عددی تبدیل شود یک معادله یک مجهولی نامیده می شود.

تعریف :مجموعه تمام جوابهای معادله را مجموعه جواب معادله می نامیم .

تعریف : معادلاتی که مجموعه جواب آنها یکسان باشد معادلات هم ارز می نامیم.

تعریف: فرم کلی معادله درجه اول یک متغیره $ax+b=0$ است که در آن

$a,b \in R$ و $a \neq 0$

دستگاه معادلات

فرم کلی یک معادله دو مجهولی درجه اول به صورت $ax + by = c$ اســت . هــرگاه دومعادله دو مجهولی درجه اول را به طور همزمان در نظر بگیریم یک دستگاه دو معادلــه دو مجهولی درجه اول را خواهیم داشت.

یک دستگاه دو معادله دو مجهولی درجه اول را به صورت زیر نشان می دهیم:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

دستور کرامر

دستگاه معادله $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ را در نظر بگیرید.با استفاده از دستور کرامر می توان در مورد دستگاه فوق در حالت کلی بحث نمود.

برای دستگاه داده شده ابتدا سه کسر $\frac{a}{a'}$, $\frac{b}{b'}$, $\frac{c}{c'}$ را بدست می آوریم.

۱- اگر $\frac{b}{b'} \neq \frac{a}{a'}$ باشد.دستگاه دارای یک جواب منحصر به فرد به صورت آمده در زیر است :

$$x=\frac{b'c-bc'}{ab'-ba'}$$

$$y=\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'}$$

۲-اگر $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ باشد،آنگاه دستگاه جواب ندارد در این حالت گوئیم دستگاه ممتنـــع است.

۳- اگر $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ باشد آنگاه دستگاه بی شمار جواب دارد. در این حالت گوئیم دستگاه مبهم است.

نامعادله درجه اول یک مجهولی

تعریف:نابرابری دو عبارت جبری که شامل متغیر باشدیک نامعادله نامیده میشود.

تعیین علامت دو جمله ای درجه اول $ax + b$

دو جمله ای درجه اول $۳x+۱$ را در نظر بگیرید این دو جمله ای برای $x = \frac{-۱}{۳}$ مساوی صفـــر است، برای مقادیر کمتر از $\frac{-۱}{۳}$ منفی (مخالف ضریب x) و برای مقادیر بیشتر از $\frac{-۱}{۳}$ مثبت (موافق ضریب x) خواهد بود.

بنابراین حاصل عبارت $ax+b$ برای مقادیر مختلف x فرق می کند برای بعضی از این مقادیر مثبت و برای برخی دیگر منفی است برای آنکه علامت دو جمله ای $ax+b$ به ازای مقادیر مختلف x را بدست آوریم به صورت زیر عمل می کنیم:

۱- عبارت $ax+b$ را مساوی صفر قرار میدهیم.

۲- ریشه معادله یعنی x را بدست می آوریم.

۳- جدولی مطابق جدول زیر تشکیل می دهیم.

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax+b$	مخالف علامت a (ضریب x)	0	موافق علامت a (ضریب x)

معادله درجه دوم

تعریف : معادله ای به فرم $ax^2 + bx + c = 0$ که در آن c, b, a اعداد حقیقی ثابت هســـتند و $a \neq 0$ است یک معادله درجه دوم از متغیر x نامیده میشود .

حل معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ ، $a \neq 0$ ، $a, b, c \in \mathbb{R}$

برای حل معادله فوق ابتدا عبارت $b^2 - 4ac$ را که مبین معادلـــه درجـــه دوم مـــی نـــامیم را محاسبه می کنیم و آن را با Δ نمایش می دهیم .

برای عدد بدست آمده Δ سه حالت امکان دارد .

الف) $\Delta > ۰$

در ایــن حــالت معادلــه درجــه دوم داده شــده دارای دو جــواب حقیقــــــی (اصطلاحــــاً می گوئیم دوریشه) متمایز است .

این ریشه ها را که با $x_۱$ و $x_۲$ نشان می دهیم طبق دستور زیر بدست می آیند:

$$x_۱ = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{۲a} \qquad x_۲ = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{۲a}$$

ب) $\Delta = 0$

در این حالت معادله درجه دوم داده شده دارای دو جواب مســـاوی اســت اصطلاحــاً گوئیــم معادله ریشه مضاعف دارد، این ریشه طبق دستور زیر بدست می آید .

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$$

ج) $\Delta < 0$

در این حالت معادله درجه دوم داده شده در سیستم اعداد حقیقی جوابی ندارد .

روابط بین ریشه های معادله درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$ و ضرایب معادله

معادله درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$ با فرض $\Delta \geq ۰$ را در نظر بگیرید . بـــدون حـــل معادلــه می توان بین ریشه های معادله و ضرایب معادله روابط زیر را داشت:

چون $\Delta \geq ۰$ است پس معادله دارای دو ریشه $x_۲ , x_۱$ است. جمع ریشه ها را با S و ضـــرب ریشه ها را با P نشان می دهیم .

داریم:

$$S = x_۱ + x_۲ = \frac{-b}{a} \qquad P = x_۱ . x_۲ = \frac{c}{a}$$

مــا بیــن ریشــه هـــای معادلـــه درجـــه دوم $ax^۲+bx+c=۰$ و ضرایـــب آن (c,b,a) روابط فوق برقرار است .

تشکیل معادله درجه دوم با معلوم بودن ریشه های آن معادله

فرض کنید ریشه های معادله درجه دومی معلوم باشد . هدف تشکیل معادله درجـــه دومـــی است که ریشه های آن معلوم هستند . برای ساختن این معادله ابتدا مجموع دو ریشه یعنـــی S و سپس حاصلضرب دو ریشه یعنی P را بدست می آوریم و مقادیر بدست آمـــده را در معادله $x^2 - Sx + P = 0$ به جای S و P قرار مـــی دهیـــم $x^2 - Sx + P = 0$ همـــان معادلـــه مطلوب است .

تجزیه عبارت ax^2+bx+c

عبارت ax^2+bx+c را می توان به صورت زیر تجزیه کرد :

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$$

که در آن x_2 , x_1 ریشه های متمایز معادله ax^2+bx+c است.

در صورتی که معادله $ax^2+bx+c=0$ دارا ی ریشـــه مضـاعف باشــد $(x_1=x_2)$ آنــگاه

تجزیه عبارت ax^2+bx+c به صورت زیر خواهد بود:

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)^2$$

تعیین علامت عبارت ax^2+bx+c

یکی از کاربرد های تجزیه عبارت درجه دوم ax^2+bx+c در تعیین علامت آن عبارت است.

ابتدا با استفاده از فرم تجزیه عبارت فوق به تعیین علامت آن می پردازیم سپس روشی مستقیم جهت تعیین علامت اینگونه عبارتها ارائه می دهیم .

ابتدا معادله $ax^2+bx+c=0$ را حل می کنیم. اگر مبین این معادله مثبت باشد آنگاه معادله دارای دو ریشه متمایز x_1 و x_2 است و داریم :

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$$

بنابراین علامت عبارت درجه دوم ax^2+bx+c همان علامت عبارت $a(x-x_1)(x-x_2)$ خواهد بود .

نامعادله درجه اول کسری

فرم کلی یک نامعادله درجه اول کسری بصورت زیر است :

$$\frac{ax+b}{cx+d} \rangle \frac{ex+f}{gx+h}$$

جائیکه h,g,f,e,d,c,b,a اعداد ثابت هستند .

برای حل چنین نامعادله هایی تمامی عبارت را سمت چپ نامعادلـــه آورده و بـا اســتفاده از تکنیک مخرج مشترک گیری ،کسر حاصل را ساده کرده و در نتیجـــه در صــورت و مخــرج کسر، عبارت حداکثراز درجه دو ظاهر خواهد شد . سپس صورت کسر و مخرج کســر را بــه صورت مجزا تعیین علامت کرده و در نتیجه علامت کسر ، حاصل ضرب علامت های صـورت و مخرج کسر خواهد بود. با توجه به جهت نامعادله داده شده ، مـــی تــوان جــواب نــهایی نامعادله داده شده را بدست آورد .

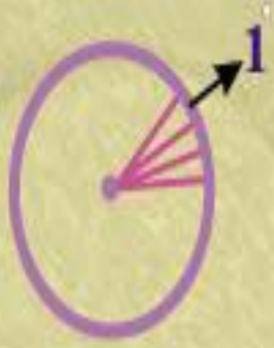
فصل چهارم

آشنایی با مفاهیم مثلثاتی

آشنائی با مفاهیم مثلثاتی

واحدهای اندازه گیری زاویه و تبدیل آنها به یکدیگر

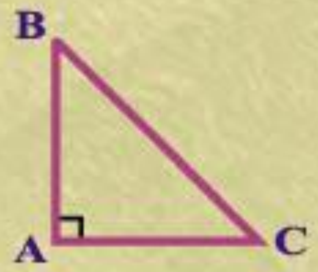
تعریف: محیط دایره ای را به ۳۶۰ قسمت مساوی تقسیم کنید اندازه زاویه مرکـــزی (زاویــه ای که راس آن مرکز دایره و اضلاع آن شعاع های دایره باشند) روبرو به هر قسمت را یک درجه می نامیم و با نماد ۱° نشان می دهیم. مقابل به تمام کمـــان دایره است .



تعریف: اگر محیط دایره به 2π قسمت تقسیم شود، اندازه زاویه مرکزی مقابل به کمـانی از دایره که طول آن برابر با شعاع دایره است . ایک رادیان نامیده می شود. ۱ رادیان را با نماد 1^R نمایش می دهیم .

نسبتهای مثلثاتی

مثلث قائم الزاویه زیر را در نظر بگیرید.



زاویه حاده $B <$ را در نظر بگیرید . برای این زاویه چهار نسبت که آنها را نسبتهای مثلثاتی زاویه B می نامیم به صورت زیر تعریف می کنیم . سینوس زاویه B را با نماد $\sin B$ نشان میدهیم و به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\sin B = \frac{\text{اندازه ضلع مقابل به زاویه B}}{\text{اندازه وتر}} = \frac{AC}{BC}$$

(می خوانیم سینوس زاویه B)

کسینوس زاویه B را با نماد $\cos B$ نشان میدهیم و به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$\cos B = \frac{\text{اندازه ضلع مجاور به زاویه B}}{\text{اندازه وتر}} = \frac{AB}{BC}$$

(می خوانیم کسینوس زاویه B)

تانژانت زاویه B را با نماد $\tan B$ (یا بعضی مواقع tgB) نشان می دهیم و بـــه صـــورت زیـــر تعریف می کنیم :

$$\tan B = \frac{\text{اندازه ضلع مقابل به زاویه } B}{\text{اندازه ضلع مجاور به زاویه } B} = \frac{AC}{AB}$$ (می خوانیم تانژانت زاویه B)

کتانژانت زاویه B را با نماد $\cot B$ (یا بعضی مواقع cotgB) نشان می دهیم و به صورت زیـر تعریف می کنیم :

$$\cot B = \frac{\text{اندازه ضلع مجاور به زاویه } B}{\text{اندازه ضلع مقابل به زاویه } B} = \frac{AB}{AC}$$ (می خوانیم کتانژانت زاویه B)

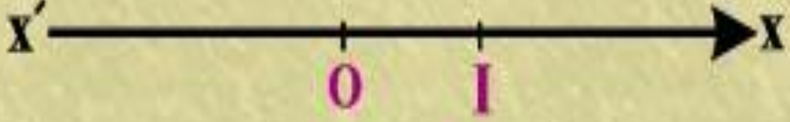
دایره مثلثاتی

دایره ای به شعاع ۱ با مبدأ حرکت و با جهت مثبت (خلاف حرکت عقربه های ساعت)

دایره مثلثاتی نامیده می شود.

محور:

یک خط جهت دار که روی آن نقطه ای به عنوان مبدا و طولی به عنوان واحد انــدازه گیــری تعیین شده باشد را یک محور مینامند. جهت محور را از طرف چــپ بــه راســت مثبــت و از طرف راست به چپ منفی در نظر می گیریم. محور را معمولا با x′ox یا y′oy مطــابق شــکل زیر نمایش می دهیم.



پاره خط OA را با در نظر گرفتن جهت مثبت محور، یک بردار می نامیم و آن را بـا $\overrightarrow{OA}$ را بدون در نظر گرفتن جهت آن، طول بردار $\overrightarrow{OA}$ می نامیم و با $|\overrightarrow{OA}|$ نمایش می دهیم.

اگر $|\overrightarrow{OI}|$ و I سمت راست مبدا باشد، $\overrightarrow{OI}$ را بردار واحد یا بردار یکه محور می نامیم.

اگر A نقطه ای دلخواه روی محور باشد طول نقطه A را x_A نمایش می دهیم و عددی است

که در تساوی $\vec{OI}$ = $\vec{OA}$ = x $\vec{OA}$ = $\vec{OA}$ صدق می کند. x_A را اندازه جبری بردار $\vec{OA}$

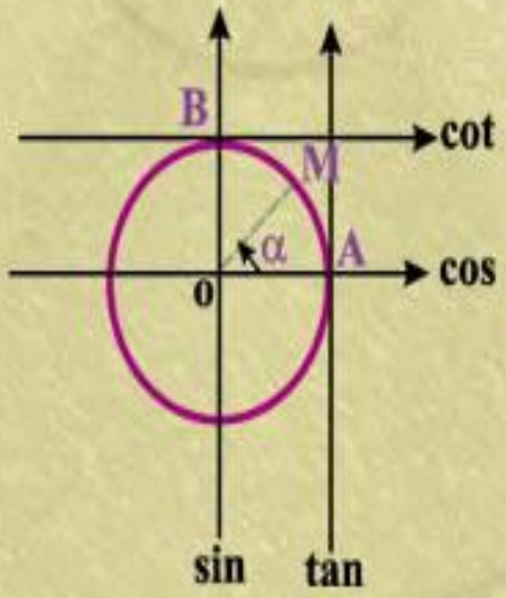
می گوییم. اندازه جبری $\vec{OA}$ را با $\overline{OA}$ نمایش می دهیم. پس:

$$\overline{OA} = x_A$$

محاسبه نسبتهای مثلثاتی زاویه α

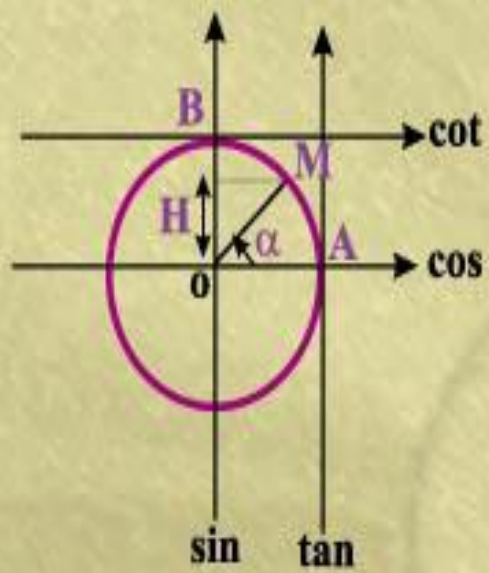
محاسبه $\sin \alpha$

الف) α زاویه ای که انتهای کمان روبروی آن در ناحیه اول دایره مثلثاتی قرار دارد .



برای محاسبه مقدار سینوس زاویه α به روش زیر عمل کنید:

از انتهای کمان $\overset{\frown}{AM}$ (کمان روبرو به زاویه مرکزی α)یعنی نقطه M بر محور سینوســـها عمود رسم کنید . پای عمود را H بنامید . اندازه جبری پای عمود تا مبدا محور سینوس هــا یعنی OH برابر با **سینوس** α خواهد بود .



$$\sin\alpha = \overline{OH}$$

و بطور خلاصه می توان جدول زیر را تنظیم نمود .

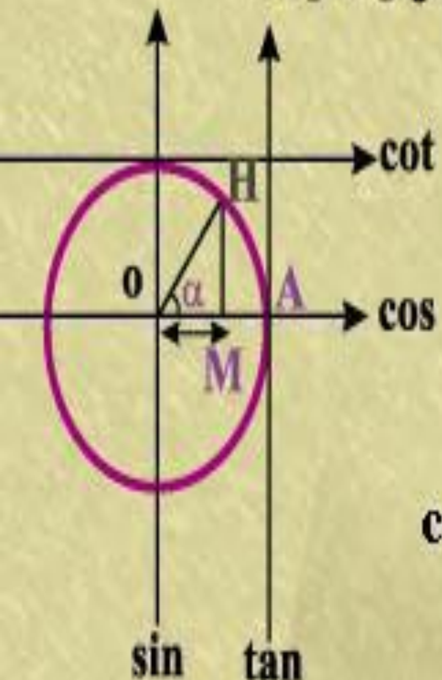
زاویه / نسبت مثلثاتی	۰	π/۲ = ۹۰°	π = ۱۸۰°	۳π/۲ = ۲۷۰°	۲π = ۳۶۰°
sin α	۰	۱	۰	-۱	۰

و از نظر علامت داریم :

زاویه / نسبت مثلثاتی	ناحیه اول 0<α<π/۲	ناحیه دوم π/۲<α<π	ناحیه سوم π<α<۳π/۲	ناحیه چهارم ۳π/۲<α<۲π
sin	+	+	−	−

محاسبه $\cos\alpha$

الف) αزاویه ای که انتهای کمان روبروی آن در ناحیه اول دایره مثلثاتی قرار دارد .



برای محاسبه مقدار کسینوس زاویه α به صورت زیر عمل کنید:

از انتهای کمان روبرو به زاویه مرکزی α یعنی از نقطه M بر محور کسینوسها عمـود رسـم کنید،پای عمود را H بنامید،اندازه جبری پای عمود تا مبدأ کسینوسها یعنی $\overline{OH}$برابــر بـا کسینوس زاویه α خواهد بود.

$$\cos\alpha = OH$$

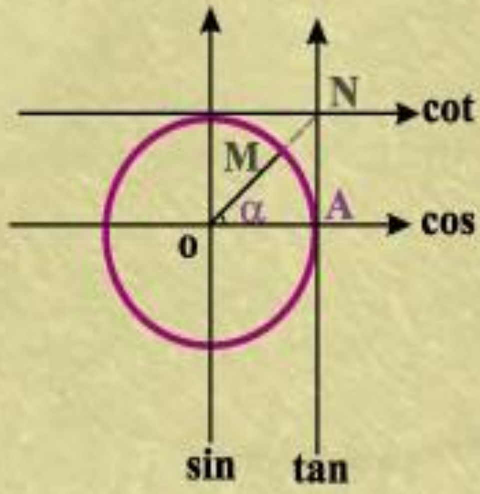
بنابراین جداول زیر را خواهیم داشت:

زاویه / نسبت مثلثاتی	۰	$\frac{\pi}{۲}=۹۰^\circ$	$\pi=۱۸۰^\circ$	$\frac{۳\pi}{۲}=۲۷۰^\circ$	$۲\pi=۳۶۰^\circ$
$\cos\alpha$	۰	۱	۰	-۱	۰

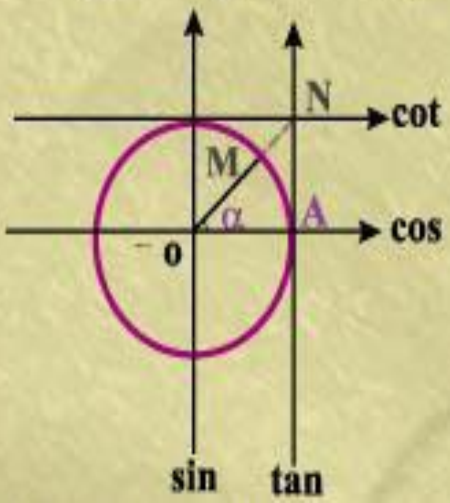
زاویه / نسبت مثلثاتی	ناحیه اول $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$	ناحیه دوم $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$	ناحیه سوم $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$	ناحیه چهارم $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$
cos	+	−	−	+

محاسبه $\tan\alpha$

الف) α زاویه ای که انتهای کمان روبروی آن در ناحیه اول دایره مثلثاتی قرار دارد.



انتهای کمان روبرو به زاویه α که به نقطه o وصل است را امتداد می دهیم تا محور tanها را قطع نماید اندازه جبری مبدأ محور تانژانت ها (نقطه A) تا محل تقاطع OM با محور تانژانت ها برابر با تانژانت زاویه α خواهد بود. پس:



$$\tan\alpha = \overline{AN}$$

و برای α که در ناحیه چهارم دایره مثلثاتی قرار دارد مقدار **tan** همواره منفی خواهد بـــود.

بنابراین خواهیم داشت:

زاویه / نسبتهای مثلثاتی	۰	$\frac{\pi}{۲}=۹۰^\circ$	$\pi=۱۸۰^\circ$	$\frac{۳\pi}{۲}=۲۷۰^\circ$	$۲\pi=۳۶۰^\circ$
tan	۰	تعریف نشده	۰	تعریف نشده	۰

و از نظر علامت :

ناحیه / نسبتهای مثلثاتی	اول $0<\alpha<\frac{\pi}{۲}$	دوم $\frac{\pi}{۲}<\alpha<\pi$	سوم $\pi<\alpha<\frac{۳\pi}{۲}$	چهارم $\frac{۳\pi}{۲}<\alpha<۲\pi$
tan	+	−	+	−

محاسبه $\cot\alpha$

با توجه به تعاریف دو نسبت سینوس و کسینوس زاویه دلخواه α می توان تعریف زیر را برای دو نسبت تانژانت و کتانژانت داشت:

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad , \quad \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

با مقایسه روابط فوق به راحتی مشاهده می شود که دو نسبت $\tan\alpha$ و $\cot\alpha$ عکس یکدیگرند لذا با مشخص بودن وضعیت یکی از این دونسبت وضعیت نسبت دیگر مشخص می گردد پس براحتی خواهیم داشت :

$\tan ۰ = ۰ \Rightarrow$ تعریف نشده است $\cot ۰$

تعریف نشده است $\tan\frac{\pi}{۲} \Rightarrow \cot\frac{\pi}{۲} = ۰$

$\tan\pi = ۰ \Rightarrow$ تعریف نشده است $\cot\pi$

تعریف نشده است $\tan\frac{۳\pi}{۲} \Rightarrow \cot\frac{۳\pi}{۲} = ۰$

$\tan ۲\pi = ۰ \Rightarrow$ تعریف نشده است $\cot ۲\pi$

نسبتهای مثلثاتی زاویه های $a+b$, $a-b$, ۲a

نسبتهای مثلثاتی مجموع دو زاویه:

سینوس مجموع دو زاویه a و b طبق فرمول زیر محاسبه میگردد:

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

کسینوس مجموع دو زاویه a , b طبق فرمول زیر محاسبه می گردد:

$$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$$

تانژانت و کتانژانت مجموع دو زاویه a , b طبق فرمول زیر محاسبه می گردد:

$$\tan(a+b)=\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b} \quad , \quad \cot(a+b)=\frac{\cot a\cot b-1}{\cot b+\cot a}$$

نسبتهای مثلثاتی تفاضل دو زاویه

سینوس تفاضل دو زاویه a و b طبق فرمول زیر محاسبه می گردد:

$$\sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b$$

کسینوس تفاضل دو زاویه a , b طبق فرمول زیر محاسبه می گردد.

$$\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$$

تعریف: دو زاویه که مجموع آنها برابر با π باشد دو زاویه مکمل می نامیم.

با توجه به تعریف فوق دو زاویه α و $\pi-\alpha$ (که مجموع آنها برابر با π اســـت) مکمــل یکدیگرند.

تعریف: دو زاویه که مجموع آنها برابر با $\frac{\pi}{2}$ باشد دو زاویه متمم نامیده می شود. با توجه به تعریف فوق دو زاویه α و $\frac{\pi}{2}-\alpha$ (که مجموع آنها برابر با $\frac{\pi}{2}$ است) متمم یکدیگرند.

نسبتهای مثلثاتی زاویه $2a$

$$\sin 2a = 2\sin a \cos a$$

$$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1 \qquad \text{ویا} \qquad \cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$$

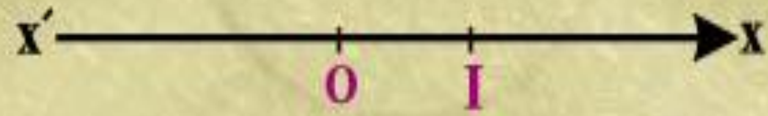
با داشتن مقادیر $\sin 2a$ و $\cos 2a$ می توان به راحتی دو نسـبت $\tan 2a$ و $\cot 2a$ را محاسـبه نمود.

فصل پنجم

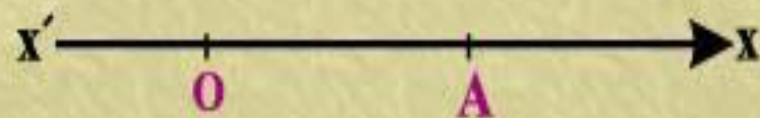
هندسه تحلیلی در صفحه

محور :

یک خط جهت دار که روی آن نقطه ای به عنوان مبداء و طولی به عنوان واحد اندازه گیری تعیین شده باشد را یک محور می نامند . جهت محور را از طرف چپ به راست مثبت و از طرف راست به چپ منفی در نظر می گیریم . محور را معمولاً با $x'ox$ یا $y'oy$ مطابق شکل زیر نمایش می دهیم .



پاره خط OA را مطابق شکل زیر در نظر بگیرید :

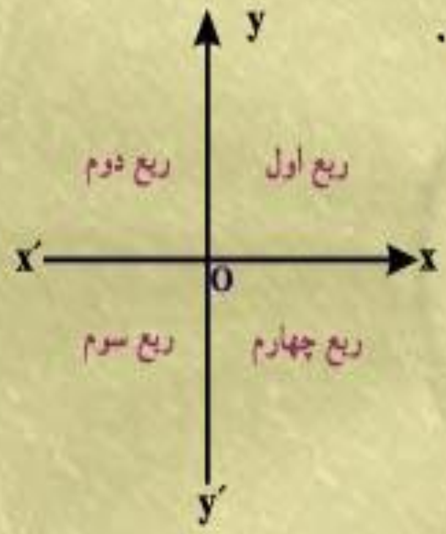


پاره خط OA را با در نظر گرفتن جهت مثبت محور ، یک بردار می نامیم و آن را با $\overline{OA}$ نمایش می دهیم . طول پاره خط $\overline{OA}$ را بدون در نظر گرفتن جهت آن ، طول بردار $\overline{OA}$ می نامیم و با $|OA|$ نمایش می دهیم .

دستگاه مختصات دکارتی

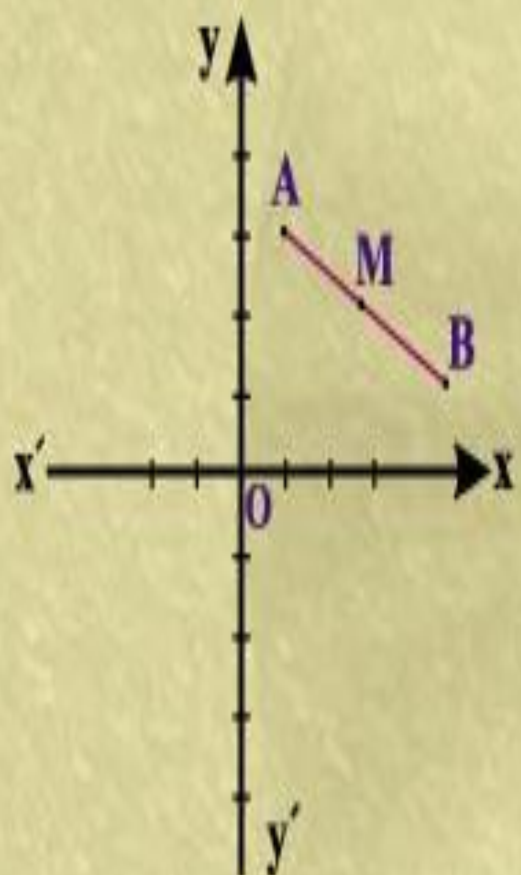
محورهای مختصات قائم :

فرض کنید x′ox یک محور باشد . از نقطه o محور y′oy را بر این محور عمود کنید. این دو محور و نقطه o را دستگاه محورهای مختصات قائم می نامیم . این دو محـــور صفحـــه را بـــه چهار ناحیه تقسیم می کنند که هر ناحیه یک ربع صفحه نامیده می شـــود . در شـــکل ربـــع اول ، ربع دوم ، ربع سوم و ربع چهارم ، مشخص شده اند .



طول نقطه A را با x_A و **عرض نقطه A** را با y_A نمایش می دهیـــم . x_A را مختــص اول و y_A را مختص یا مولفه دوم و (x_A, y_A) را مختصات نقطه A می نامیم و می نویسیم : $A(x,y)$.

A نقطه ای است به مختصات (۳,۲)



مختصات وسط یک پاره خط در صفحه :

اگر $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ دو نقطه در صفحه باشند

مختصات نقطه M وسط پـــاره خــط AB عبارتست از :

$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

طول پاره خط در صفحه :

فاصله دو نقطه A , B را با نماد AB نشان می دهیـــم . فاصلــه ایــن دو نقطــه بــر حســب مختصات آنها محاسبه می شود .

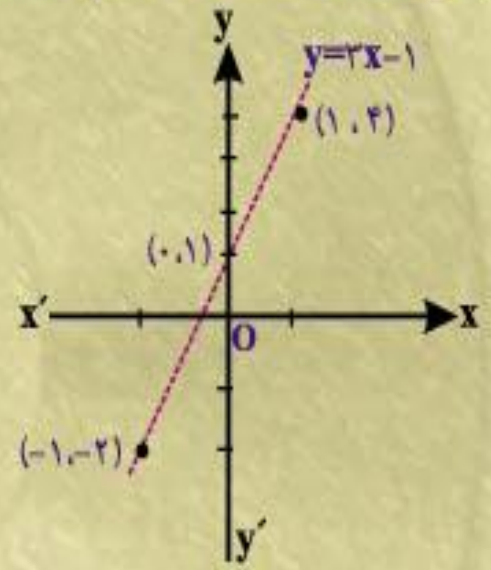
فرض کنید $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ دو نقطه دلخواه باشند آنگاه :

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

معادله خط :

برای رسم نمودار معادلاتی به صورت $y = ۳x + ۱$ در صفحه ، عددهای متفاوتی به x می دهیم و عددهایی نظیر آنها برای y بدست می آوریم ، سپس نقاط بدست آمده را در صفحه مختصات مشخص کرده و آنها را به هم وصل می کنیم . خطی که از این نقاط می گذرد نمودار معادله $y = ۳x + ۱$ است .

X	محاسبه ۳x+۱	y	نقطه (x,y)
-۱	۳(-۱)+۱	-۲	(-۱,-۲)
۰	۳(۰)+۱	۱	(۰,۱)
۱	۳(۱)+۱	۴	(۱,۴)



شیب خط

خط L را در نظر بگیرید . نسبت تغییرات عرضهای دو نقطه دلخواه از خط L بـــه تغیـــیرات طولهای متناظر آنها را شیب آن خط می نامیم . به بیان دیگر :

اگر $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ دو نقطه دلخواه از خط L باشند آنگاه :

$$\text{شیب خط } L = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

شیب خط L را با m نشان می دهیم .

تعیین معادله خطی که از دو نقطه $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ می گذرد :

ابتدا شیب خط را با داشتن دو نقطه A,B بدست می آوریم . با داشتن شیب خط و انتخـــاب یکی از این نقاط به دلخواه حالت قبل را خواهیم داشت . یعنی معادله خطی را مـــی خواهیـــم که شیب و یک نقطه از آن معلوم است .

مختصات فصل مشترک دو خط :

برای یافتن مختصات فصل مشترک دو خط $a'x + b'y = c'$, $ax + by = c$ ، دســـتگاهی از معادلات آن خطوط تشکیل می دهیم . بصورت

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

با حل آن دستگاه می توان در مورد فصل مشترک آن دو خط اظهارنظر نمـود . در حالتیکـه دستگاه یک جواب منحصر به فرد دارد ، دو خط یکدیگر را فقط در یک نقطه قطع می کننـد . در این حالت گوییم دو خط متقاطعند .

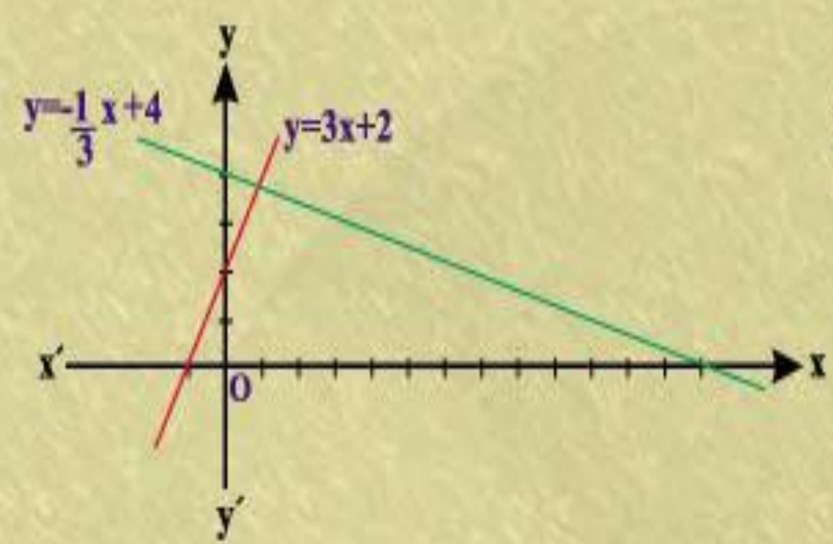
در حالتیکه دستگاه جواب نداشته باشد ، نقطه تقاطعی وجــود نـدارد و دو خـط متمـایز و موازیند .

و در حالتیکه دستگاه بی شمار جواب داشته باشد ، دو خط بر هم منطبق هستند .

دو خط موازی با هم :

شرط لازم و کافی برای اینکه دو خط موازی باشند ایــــن اســـت کـــه شـــیبهای یکسان داشته باشند .

دو خط عمود بر هم :



نمودار خطوط $y=3x+2$, $y=-\frac{1}{3}x+4$ را

در یک دستگاه مختصات رسم کنید .

مشاهده می کنیم که خطوط زیر بر هم عمودند . شیب این خطوط به ترتیب برابر بـا ۳ , $-\frac{1}{3}$

و حاصلضرب آنها یعنی $-\frac{1}{3}\times 3$ برابر با ۱− است .

بطور کلی : شرط لازم و کافی برای آنکه دو خط بر هم عمود باشند این است که حـاصلضرب

آنها برابر با ۱− باشد .

فاصله یک نقطه از یک خط :

فاصله نقطه دلخواه $M(x_1, y_1)$ از خط L به معادله $ax + by + c = 0$ را با d نشان می دهیم که از رابطه زیر به دست می آید .

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

فاصله دو خط موازی :

خطوط L و L' به ترتیب با معادله های $ax + by + c = 0$ و $ax + by + c' = 0$ در نظر بگیریـد . واضح است که L و L' دارای شیبهای یکسان $-\frac{a}{b}$ هستند . پس L و L' موازینــد .

فاصله این دو خط موازی را d می نامیم و از فرمول زیر آن را محاسبه می کنیم:

$$d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

زاویه میل خط :

زاویه ای که خط L به معادله $y=mx+h$ با جهت مثبت محور xها می سازد ، زاویه میل خط یا زاویه شیب خط می نامیم .

ضریب زاویه خط یا شیب خط برابر با تانژانت زاویه میل است .

پس اگر α زاویه میل خط یعنی زاویه ای که خط با جهت مثبت محور x ها می سازد، باشـد ، آنگاه :

$$m = \tan \alpha$$

فصل ششم

لگاریتم

تعریف :فرض کنید $a \neq ۱$ عدد حقیقی مثبت باشد اگر $a^x = N$ ، x را لگاریتم N در مبنـای a می نامیم و می نویسیم $\log_a^N = x$.

بنابراین $a^x = N$ اگر و فقط اگر $\log_a^N = x$.

خواص لگاریتم :

با توجه به قواعد $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ و $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ در توانها خواهیم داشت :

1- لگاریتم حاصلضرب دو عدد برابر با مجموع لگاریتم های آن دو عدد است به عبارتی :

$$\log_a^{MN} = \log_a^{M} + \log_a^{N}$$

خاصیت فوق را می توان تعمیم داد آنگاه داریم :

$$\log(M_1 \cdot M_2 \cdot \ldots \cdot M_n) = \log_a^{M_1} + \log_a^{M_2} + \ldots + \log_a^{M_n}$$

2-لگاریتم نسبت دو عدد با تفاضل لگاریتم های آن دو عدد برابر است .

$$\log_a^{\frac{M}{N}} = \log_a^{M} - \log_a^{N}$$

۹

3- لگاریتم عدد تواندار باحاصلضرب توان درلگاریتم همان عدد برابر است . پس :

$$\log_a^{M^n} = n\log_a^M$$

معادلات لگاریتمی و نمایی :

معادلاتی به فرم $a^x = b$ که در آن b, a اعداد حقیقی مثبت و $a \neq 1$ است را معادلـــه نمــائی می نامیم .یکی از روشهای حل اینگونه معادلات استفاده از لگاریتم است.

معادلات لگاریتمی :

معادله ای که شامل لگاریتم یک عبارت جبری از مجهولی باشد ، معادله لگاریتمی نامیده می شود .