

جزوه فیزیک پیش (رشته‌های مکانیک، کامپیوتر، برق) (۲)

مدرس: مراد

۱- اندازه و جهت بردارهای زیر را تعیین کنید.

الف)  $\vec{A} = 2\hat{i} - 2\hat{j}$

حل: اندازه:  $|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8}$   
جهت:  $\tan \theta = \frac{A_y}{A_x} = \frac{-2}{2} = -1$   
 $\theta = \tan^{-1}(-1)$   
 $\theta = \text{Arctan}(-1)$

ب)  $\vec{L} = \hat{i} + 5\hat{j}$

حل: اندازه:  $|\vec{L}| = \sqrt{L_x^2 + L_y^2} = \sqrt{1^2 + 5^2} = \sqrt{1+25} = \sqrt{26}$   
جهت:  $\tan \theta = \frac{L_y}{L_x} = \frac{5}{1}$   
 $\theta = \tan^{-1}(5)$   
 $\theta = \text{Arctan}(5)$

ج)  $\vec{D} = 8\hat{i} - 10\hat{j}$

۲- اندازه بردارهای زیر را بدست آورید.

الف)  $\vec{C} = \hat{i} - 2\hat{j} + 5\hat{k}$

حل:  $|\vec{C}| = \sqrt{C_x^2 + C_y^2 + C_z^2} = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 5^2} = \sqrt{1+4+25} = \sqrt{30}$

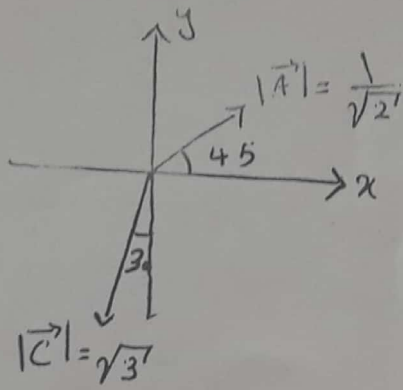
ب)  $\vec{F} = 3\hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k}$

حل:  $|\vec{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} = \sqrt{3^2 + 4^2 + (-1)^2} = \sqrt{9+16+1} = \sqrt{26}$

ج)  $\vec{M} = 2\hat{i} + 8\hat{j} - 3\hat{k}$

بردارهای داده شده را به مؤلفه‌های مختصات تجزیه کنید.

الف)



$$\begin{cases} \sin 45 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos 45 = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} \sin 30 = \frac{1}{2} \\ \cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

حل:

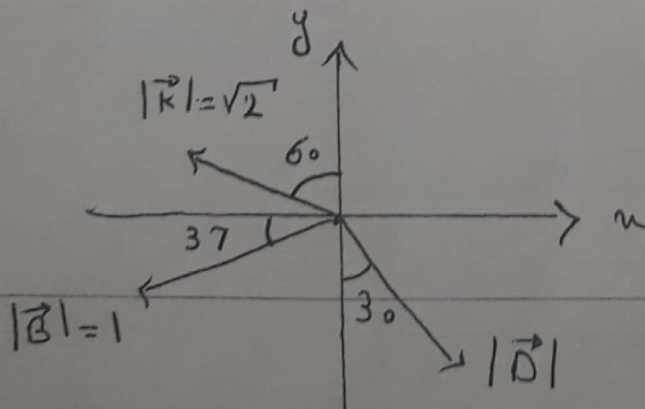
$$\begin{cases} A_x = |A| \times \cos 45 = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} \\ A_y = |A| \times \sin 45 = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} = \frac{1}{2} \hat{i} + \frac{1}{2} \hat{j}$$

$$\vec{C} \begin{cases} C_x = -|C| \times \sin 30 = -\sqrt{3} \times \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ C_y = -|C| \times \cos 30 = -\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\vec{C} = C_x \hat{i} + C_y \hat{j} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \hat{i} + \left(-\frac{3}{2}\right) \hat{j}$$

ب)

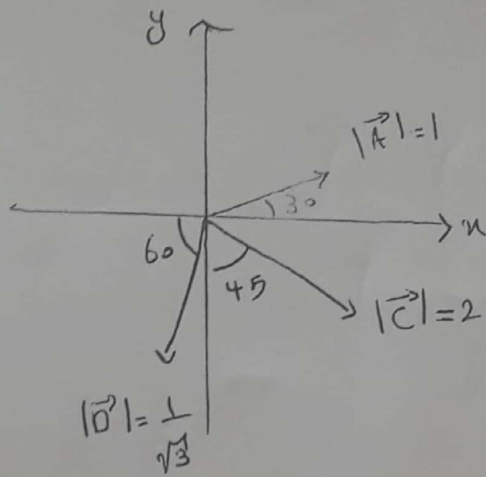


$$\begin{cases} \sin 60 = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos 60 = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} \sin 30 = \frac{1}{2} \\ \cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 37 = 0.6 \\ \cos 37 = 0.8 \end{cases}$$

برای بردارهای زیر را بدست آورید.

الف)



$$\begin{cases} \sin 30 = \frac{1}{2} \\ \cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 45 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos 45 = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 60 = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos 60 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

ج/

$$\vec{A} = \begin{cases} A_x = |\vec{A}| \times \cos 30 = 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ A_y = |\vec{A}| \times \sin 30 = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} = \frac{\sqrt{3}}{2} \hat{i} + \frac{1}{2} \hat{j}$$

$$\vec{C} = \begin{cases} C_x = |\vec{C}| \times \sin 45 = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \\ C_y = -|\vec{C}| \times \cos 45 = -2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2} \end{cases}$$

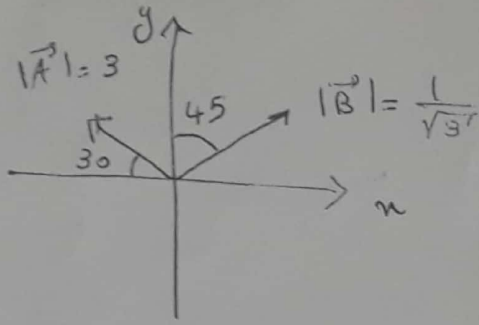
$$\vec{C} = C_x \hat{i} + C_y \hat{j} = \sqrt{2} \hat{i} + (-\sqrt{2}) \hat{j}$$

$$\vec{D} = \begin{cases} D_x = -|\vec{D}| \times \cos 60 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{2\sqrt{3}} \\ D_y = -|\vec{D}| \times \sin 60 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\vec{D} = D_x \hat{i} + D_y \hat{j} = -\frac{1}{2\sqrt{3}} \hat{i} + \left(-\frac{1}{2}\right) \hat{j}$$

$$\begin{aligned} \vec{R} &= \vec{A} + \vec{C} + \vec{D} = (A_x + C_x + D_x) \hat{i} + (A_y + C_y + D_y) \hat{j} = \\ &= \left[ \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{2} + \left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}\right) \right] \hat{i} + \left[ \frac{1}{2} + (-\sqrt{2}) + \left(-\frac{1}{2}\right) \right] \hat{j} = \\ &= \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \right) \hat{i} - \sqrt{2} \hat{j} \end{aligned}$$

مسئله



۵- بردارهای زیر را بردارید

$$\begin{cases} \sin 45 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos 45 = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} \sin 30 = \frac{1}{2} \\ \cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

۶- جمع و تفریق بردارهای زیر را بردارید

$$\vec{A} = -\hat{i} + 2\hat{k}$$

$$\vec{A} - \vec{B} \quad (\text{الف})$$

$$\vec{B} = 5\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$$

$$\vec{A} + \vec{C} + 2\vec{D} \quad (\text{ب})$$

$$\vec{D} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$$

$$\vec{A} + 3\vec{D} \quad (\text{ج})$$

$$\vec{C} = 2\hat{i} - 5\hat{j} + 3\hat{k}$$

$$\vec{A} - \vec{B} - \vec{C} + \vec{D} \quad (\text{د})$$

الف)  $\vec{A} - \vec{B} = (A_x - B_x)\hat{i} + (A_y - B_y)\hat{j} + (A_z - B_z)\hat{k} =$   
 $(-1 - 5)\hat{i} + (0 - 3)\hat{j} + [2 - (-1)]\hat{k} = -6\hat{i} - 3\hat{j} + 3\hat{k}$

ب)  $\vec{A} + \vec{C} + 2\vec{D} = (A_x + C_x + 2D_x)\hat{i} + (A_y + C_y + 2D_y)\hat{j} +$   
 $(A_z + C_z + 2D_z)\hat{k} = \left[ \frac{-1 + 2 + 2 \times 3}{7} \right]\hat{i} + \left[ \frac{0 + (-5) + 2 \times 2}{-1} \right]\hat{j} +$   
 $\left[ \frac{2 + (-3) + 2 \times 2}{9} \right]\hat{k} = 7\hat{i} - \hat{j} + 9\hat{k}$

$$\vec{A} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$$

۷. برای بردارهای داده شده زیر:

$$\vec{B} = 2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$$

الف)  $\vec{A} \cdot \vec{B}$  را بدست آورید.

ب)  $\vec{A} \times \vec{B}$  را بدست آورید.

ج) زاویه بین دو بردار را بدست آورید.

حل الف)  $\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = 1 \times 2 + (-1) \times 1 + 1 \times 3 =$   
 $2 - 1 + 3 = 4$

ب)  $\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \hat{i} \underbrace{[(-1) \times 3 - 1 \times 1]}_{-4} - \hat{j} \underbrace{[1 \times 3 - 1 \times 2]}_1$

$$+ \hat{k} \underbrace{[1 \times 1 - (-1) \times 2]}_3 = -4\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$$

ج)  $\cos \theta = \frac{A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z}{|\vec{A}| \times |\vec{B}|} = \frac{4}{\sqrt{3} \times \sqrt{14}}$

$$|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

$$|\vec{B}| = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2} = \sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

4

$$\vec{A} = 2\hat{i} - \hat{k}$$

$$\vec{B} = \hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}$$

۸- برای بردارهای داده شده زیر:

(الف)  $\vec{A} \cdot \vec{B}$  و  $\vec{A} \times \vec{B}$  را به دست آورید.

(ب) زاویه بین دو بردار را به دست آورید.

۱۳ اگر  $\vec{A} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$  ،  $\vec{B} = 2\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k}$  باشد زاویه بین دو بردار را بیابید

۱۴  $\vec{A} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$  بردار  $\vec{B} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$  عمود است بر

حل / شرط عمود:  $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = 3 \times 2 + (-2) \times (-3) + (1) \times 2 = 6 + 6 + 2 = 14$$

$\vec{A}$  بر  $\vec{B}$  عمود نیست

۱۴ بردار  $\vec{A} = \hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}$  بردار  $\vec{B} = -\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$  عمود است بر

۱۵ اگر دو بردار  $\vec{A} = (L+3)\hat{i} + 2\hat{j} + N\hat{k}$  و  $\vec{B} = \hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$  مساری باشند مقادیر  $L$  و  $N$  را بیابید اگر چه

حل /  $\vec{A} = \vec{B} \Rightarrow \begin{cases} L+3=1 \rightarrow L=1-3=-2 \\ N=1 \end{cases}$

۱۴ اگر بردار  $\vec{A} = (L-5)\hat{i} - \hat{j} + (L+1)\hat{k}$  بردار  $\vec{B} = 2\hat{i} - (L+1)\hat{j} + 3\hat{k}$  عمود باشد مقدار  $L$  را بیابید اگر چه

حل /  $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = 0 \Rightarrow (L-5) \times 2 + (L+1) \times (-1) + 3 \times (L+1) = 0 \Rightarrow 2L - 10 - L + 1 + 3L + 3 = 0$

حل

۱۵ اگر بردار  $\vec{A} = 3L\hat{i} + 2M\hat{j} - 3\hat{k}$  با بردار  $\vec{B} = 3\hat{i} + \hat{j} + 5N\hat{k}$  مسامی باشد مقادیر  $L$  و  $M$  و  $N$  را بدست آورید.

۱۴ اگر بردار  $\vec{A} = (N+5)\hat{i} - 2\hat{j} + N\hat{k}$  بر بردار  $\vec{B} = \hat{i} - N\hat{j} + 3\hat{k}$  عمود باشد مقدار  $N$  را بدست آورید.

۱۳ معادله مکان - زمان متحرک در SI بصورت  $x = 4t^5 + 2t^3 - t - 1$  می باشد

الف) مکان متحرک در لحظه  $t=0$  و  $t=1$  ثانیه را بدست آورید.

ب) سرعت متوسط متحرک را در بازه ۰ تا ۱ ثانیه را بدست آورید.

ج) سرعت لحظه ای متحرک را در لحظات ۰ و ۱ ثانیه بدست آورید.

حل / الف)  $t=0 \rightarrow x = 4 \times 0^5 + 2 \times 0^3 - 0 - 1 = -1$

$t=1 \rightarrow x = 4 \times 1^5 + 2 \times 1^3 - 1 - 1 = 4 + 2 - 1 - 1 = 4$

ب)  $\bar{v} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{4 - (-1)}{1 - 0} = \frac{4+1}{1} = 5 \frac{m}{s}$

$t_1 = 0 \rightarrow x_1 = -1$

$t_2 = 1 \rightarrow x_2 = 4$

ج)  $v = \frac{dx}{dt} = 4 \times 5 \times t^4 + 2 \times 3 \times t^2 - 1 - 0 = 20t^4 + 6t^2 - 1$

لحظه ای  $v = 20t^4 + 6t^2 - 1$   $t=0 \rightarrow v = 20 \times 0^4 + 6 \times 0^2 - 1 = -1 \frac{m}{s}$

$t=1 \rightarrow v = 20 \times 1^4 + 6 \times 1^2 - 1 = 20 + 6 - 1 = 25$



18) معادله سرعت - زمان متحرکی در SI به صورت  $v = t^3 - 2t + 1$  می باشد.

الف) سرعت متوسط در لحظه  $t = 1$  ثانیه را بدست آورید.

ب) میانگین سرعت متوسط متحرک را در بازه  $t = 2$  ثانیه بدست آورید.

ج) میانگین لحظه ای را در لحظات  $t = 0$  و  $t = 1$  ثانیه بدست آورید.

حل

الف)  $v = t^3 - 2t + 1 = 0$

$\bar{a} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{5 - 1}{2 - 0} = \frac{4}{2} = 2 \frac{m}{s^2}$

$t_1 = 0 \rightarrow v_1 = 0^3 - 2 \times 0 + 1 = 1$

$t_2 = 2 \rightarrow v_2 = 2^3 - 2 \times 2 + 1 = 8 - 4 + 1 = 5$

ج)  $a = \frac{dv}{dt} = 3t^2 - 2$   $\left\{ \begin{array}{l} \xrightarrow{t=0} a = -2 \frac{m}{s^2} \\ \xrightarrow{t=1} a = 3 - 2 = 1 \frac{m}{s^2} \end{array} \right.$

19) معادله مکان - زمان متحرکی در SI به صورت  $x = 5t^4 - t^3 + 2t + 1$  می باشد:

الف) سرعت متوسط را در بازه  $t = 0$  تا  $t = 2$  ثانیه بدست آورید.

ب) سرعت لحظه ای را در لحظات  $t = 0$  و  $t = 2$  ثانیه بدست آورید.

ج) میانگین سرعت متوسط را در بازه  $t = 0$  تا  $t = 2$  ثانیه بدست آورید.

د) میانگین لحظه ای را در لحظه  $t = 0$  ثانیه بدست آورید.